

## Корневые подпространства. Диагонализуемость

- 3.1.** Выясните, какие из следующих матриц можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису над  $\mathbb{R}$  или над  $\mathbb{C}$ :

$$\text{а) } \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите этот базис и соответствующий вид матрицы.

- 3.2.** При каких условиях диагонализуема матрица, у которой все элементы, кроме, быть может, элементов побочной диагонали  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , нулевые?
- 3.3.** Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — собственные значения линейного оператора  $\mathcal{A}$  в  $n$ -мерном комплексном пространстве. Найдите его собственные значения как оператора в соответствующем  $2n$ -мерном вещественном пространстве.
- 3.4.** Найдите собственные значения и корневые подпространства линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 3.5.** Найдите все инвариантные подпространства для оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

- 3.6.** Докажите, что всякий оператор в конечномерном комплексном пространстве в подходящем базисе записывается верхнетреугольной матрицей.