Собственные векторы и собственные значения

21. **а)** Докажите, что собственные значения вещественной симметрической матрицы размера 2×2 вещественны.

б) Докажите, что вещественная матрица нечетного размера имеет вещественный собственный вектор, а четного — не обязательно.

22. Найдите собственные значения и собственные векторы матриц

а) $\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} -8 & -12 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 10 & 16 & 11 \\ -4 & -6 & -5 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$; **е)** $\begin{pmatrix} -3 & -11 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; **ж)** $\begin{pmatrix} -4 & -7 & -4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

23. Возведите в пятую степень матрицы из пп. **а)** и **в)** предыдущей задачи.

24. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора $F\colon \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$ на пространстве многочленов, если F переводит многочлен $f(x)$ в многочлен:

а) $f'(x)$; **б)** $xf'(x)$; **в)** $(x+1)f'(x)$; **г)** $f(x+1)$; **д)** $\frac{1}{2}(f(x)+f(-x)$;
е) $f(x+1) - f(x)$; **ж)** $\int_0^x f(t)dt$; **з)** $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

25*. Найдите все инвариантные подпространства этих операторов.

26. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора F, действующего на комплексных матрицах размера 2×2 по формуле:

а) $F(X) = AX$; **б)** $F(X) = AX - XA$; $F(X) = AXA^{-1}$.