

Разные задачи по линейной алгебре

1.1. Найдите матрицу оператора:

- а) $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$ в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$;
- б) поворота плоскости на угол α в стандартном базисе $\mathbb{R}^2$;
- в) поворота трехмерного пространства на угол $2\pi/3$ вокруг прямой, содержащей вектор $e_1 + e_2 + e_3$, в стандартном базисе $\mathbb{R}^3$;
- г) проектирования трехмерного пространства на ось вектора e_2 параллельно координатной плоскости векторов e_1 и e_3 в базисе (e_1, e_2, e_3) ;
- д) проектирования на ось вектора e_1 вдоль вектора $e_1 + e_2$ в стандартном базисе $\mathbb{R}^2$.

1.2. Найдите матрицу оператора дифференцирования в пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ в базисе

- а) $(1, x, x^2, \dots, x^n)$; б) $(x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1)$; в) $\left(1, x-1, \frac{(x-1)^2}{2!}, \dots, \frac{(x-1)^n}{n!}\right)$.

1.3. Что происходит с матрицей оператора при перестановке базисных векторов?

1.4. Представьте многочлен $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ в виде линейной комбинации многочленов $1, x-1, (x-1)^2/2!, (x-1)^3/3!$ и $(x-1)^4/4!$.

1.5. Вася выписал две матрицы: размера 5×7 и размера 7×5 , перемножил их и получил единичную матрицу 5×5 . Потом он перемножил те же матрицы в другом порядке и получил матрицу 7×7 , которая тоже оказалась единичной. Не ошибся ли он?

1.6. Бывают ли две квадратные матрицы A, B , для которых $AB - BA = E$?

1.7. Пусть A — матрица размера 2×2 . Докажите, что $\operatorname{tr} A = \det A = 0$ тогда и только тогда, когда $A^2 = 0$.

1.8. Бывает ли, что линейный оператор а) над $\mathbb{R}$; б) над $\mathbb{C}$; в) над $\mathbb{F}_2$ не имеет ни одного собственного вектора?

1.9. Вычислите n -ю степень матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.10. а) Пусть линейные операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в комплексном конечномерном векторном пространстве таковы, что $\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} = 0$. Докажите, что эти операторы имеют общий собственный вектор.

б*) Пусть теперь ранг оператора $\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$ равен 1. Докажите, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют общий собственный вектор.

в) Верно ли это, если ранг $\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$ равен двум?