Мы будем обозначать через $\pi(x)$ количество простых натуральных чисел, не превосходящих x. История определения асимптотики функции $\pi(x)$ такова:

1. Евклид: $\pi(x) \to \infty$ при $x \to \infty$;
2. Эйлер: $\dfrac{\pi(x)}{x} \to 0$ при $x \to \infty$;
3. Чебышёв (1848 г.): Если предел $\dfrac{\pi(x)\ln(x)}{x}$ существует, то он равен 1;
4. Адамар и Валле-Пуссен (1896 г.): $\dfrac{\pi(x)\ln(x)}{x} \to 1$ при $x \to \infty$.

В этом листке мы докажем неравенства

$$a\,\frac{x}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant b\,\frac{x}{\ln x}.$$

Константы, которые получатся у нас, будут такими: $a = \frac{\ln 2}{2} \approx 0.3465$, а $b = 5\ln 2 \approx 3.4657$. У Чебышёва константы были более точные: $a \approx 0.92129$, $b \approx 1.10555$.

Задача 1. (*Нижняя оценка для НОК*) Обозначим НОК $[1, 2, \ldots, 2n+1]$ через K, а $\displaystyle\int_0^1 \big(x(1-x)\big)^n\,dx$ через I. Докажите, что: **а)** $I < \dfrac{1}{4^n}$; **б)** число $K \cdot I$ целое; **в)** $K > 4^n$.

Задача 2. (*Нижняя оценка для $\pi(x)$*) В обозначениях предыдущей задачи докажите, что
а) $K < (2n+1)^{\pi(2n+1)}$; **б)** $\pi(2n+1) > \dfrac{2n}{\log_2(2n+1)}$; **в)** $\frac{\ln 2}{2}\,\dfrac{x}{\ln x} \leqslant \pi(x)$

Задача 3. (*Оценка произведения простых чисел*)
а) Докажите, что число C_{2m-1}^{m} больше произведения всех простых чисел, больших m, но меньших $2m$;
б) Докажите, что $\displaystyle\prod_{p \leqslant x} p < 4^x$, где $\displaystyle\prod_{p \leqslant x} p$ — произведение всех простых чисел, не превосходящих x.

Задача 4. (*Верхняя оценка для $\pi(x)$*) Докажите, что
а) $\pi(x)^{\pi(x)/2} \leqslant \pi(x)! \leqslant 4^x$; **б)** $\pi(x) \leqslant 5\ln 2\,\dfrac{x}{\ln x}$.

Задача 5. Пусть $p_1, p_2, \ldots,$ — последовательность всех простых чисел. Докажите, что найдутся такие константы α и β, что $\alpha n \ln n < p_n < \beta n \ln n$ для всех n.

Задача 6. Докажите, что ряд из обратных простых чисел расходится.

1 а	1 б	1 в	2 а	2 б	2 в	3 а	3 б	4 а	4 б	5	6