



**Задача 14°.** (Формула Муавра) Пусть  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Докажите, что  $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ .

**Задача 15.** Найдите суммы: **а)**  $\sin \varphi + \sin 2\varphi + \dots + \sin n\varphi$ ; **б)**  $\cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi$ ;  
**в)**  $\sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \dots + \frac{1}{2^n} \sin n\varphi$ ; **г)**  $1 + 2 \cos \varphi + 3 \cos 2\varphi + \dots + (n+1) \cos n\varphi$ .

**Задача 16.** Выразите  $\sin^4 x$  и  $\cos^5 x$  в виде суммы чисел вида  $\alpha \sin kx$  и  $\beta \cos lx$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  и  $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Задача 17.** Выразите  $\cos nx$  и  $\sin nx$  через  $\cos x$  и  $\sin x$ .

**Задача 18.** Докажите, что многочлен степени  $n$  с комплексными коэффициентами имеет не более  $n$  комплексных корней.

**Задача 19.** **а)** Найдите (и нарисуйте) все комплексные корни многочленов:  $z^2 - 1$ ,  $z^3 - 1$ ,  $z^4 - 1$ ,  $z^5 - 1$ ,  $z^6 - 1$ . **б)** Сколько корней имеет уравнение  $z^n = 1$ ?

**Задача 20.** **а)** Вычислите сумму и произведение всех корней степени  $n$  из 1. **б)** Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — все корни степени  $n$  из 1,  $\alpha_1 = 1$ . Найдите  $\alpha_1^s + \dots + \alpha_n^s$  (где  $s \in \mathbb{N}$ ) и  $(1 - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (1 - \alpha_n)$ .

**Задача 21.** Пусть  $P$  — многочлен степени  $k$  с коэффициентами из  $\mathbb{C}$ . Докажите, что среднее арифметическое значений  $P$  в вершинах правильного  $n$ -угольника равно значению  $P$  в центре многоугольника, если  $n > k$ .

**Задача 22.** **а)** Пусть  $z = \frac{3 + 4i}{5}$ . Найдётся ли такое  $n \in \mathbb{N}$ , что  $z^n = 1$ ?

**б)** Докажите, что  $\frac{1}{\pi} \arctg \frac{4}{3} \notin \mathbb{Q}$ .

**Задача 23.** Пусть  $z, v, w \in \mathbb{C}$ , причём  $z + v + w = z^2 + v^2 + w^2 = z^3 + v^3 + w^3 = 0$ . Верно ли, что  $z^4 + v^4 + w^4 = 0$ ?

**Задача 24.** Нарисуйте множество комплексных чисел, для которых:

**а)**  $z^n + 1 = 0$ ; **б)**  $|z - i| \leq 2$ ; **в)**  $|z - 1| = 2|z - i|$ ; **г)**  $z^2 + \bar{z}^2 = 4$ ;  
**д)**  $|z - 1| - |z + 1| \leq 3$ ; **е)**  $|z - 1| + |z + 1| = 3$ ; **ж)**  $z + \bar{z} = 2|z - 1|$ .

**Задача 25.** Каким геометрическим преобразованиям соответствуют следующие отображения:

**а)**  $z \mapsto \bar{z}$ ; **б)**  $z \mapsto (\cos \varphi + i \sin \varphi)z$ , где  $\varphi \in \mathbb{R}$ ;  
**в)**  $z \mapsto \lambda z$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}$ ; **г)**  $z \mapsto wz$ , где  $w \in \mathbb{C}$ ?

**Задача 26.** Запишите в виде функции комплексного переменного:

**а)** ортогональную проекцию на ось  $x$ ;  
**б)** симметрию относительно оси  $y$ ;  
**в)** центральную симметрию с центром  $A$ ;  
**г)** поворот на угол  $\varphi$  относительно точки  $A$ ;  
**д)** гомотетию с коэффициентом  $k$  и центром  $A$ ;  
**е)** симметрию относительно прямой  $y = 3$  со сдвигом на 1 влево;  
**ж)** поворот, переводящий ось  $x$  в прямую  $y = 2x + 1$ ;  
**з)** симметрию относительно прямой  $y = 2x + 1$ .

**Задача 27.** Куда отображение  $z \mapsto z^2$  переводит **а)** декартову координатную сетку;

**б)** полярную координатную сетку; **в)** окружность  $|z + i| = 1$ ;

**Задача 28.** Те же вопросы для отображения  $z \mapsto 1/z$ .

**Задача 29.** Куда отображение  $z \mapsto \sqrt{z}$  переводит верхнюю полуплоскость (без границы)?

**Задача 30.** **а)** Куда отображение  $z \mapsto 1/z$  переводит множество  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0, |z| \leq 1\}$ ?

**б)\*** Тот же вопрос для отображения  $z \mapsto \frac{z + 1/z}{2}$ .

14	15	15	15	15	16	17	18	19	19	20	20	21	22	22	23	24	24	24	24	24	24	25	25	25	25	26	26	26	26	26	26	26	27	27	27	28	29	30	30		
	а	б	в	г				а	б	а	б		а	б		а	б	в	г	д	е	ж	а	б	в	г	а	б	в	г	д	е	ж	з	а	б	в			а	б