

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &\stackrel{\text{def}}{=} (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &\stackrel{\text{def}}{=} (ac - bd, ad + bc)\end{aligned}$$

Множество комплексных чисел обозначается буквой  $\mathbb{C}$ .

[illegible]

Докажите, что  $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ .

**Задача 16.** Выразите  $\sin^4 x$  и  $\cos^5 x$  в виде суммы чисел вида  $\alpha \sin kx$  и  $\beta \cos lx$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  и  $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

**Задача 18.** Докажите, что многочлен степени  $n$  с комплексными коэффициентами имеет не более  $n$  комплексных корней.

**Задача 20.** а) Вычислите сумму и произведение всех корней степени  $n$  из 1. б) Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — все корни степени  $n$  из 1,  $\alpha_1 = 1$ . Найдите  $\alpha_1^s + \dots + \alpha_n^s$  (где  $s \in \mathbb{N}$ ) и  $(1 - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (1 - \alpha_n)$ .

**Задача 21.** Пусть  $P$  — многочлен степени  $k$  с коэффициентами из  $\mathbb{C}$ . Докажите, что среднее арифметическое значений  $P$  в вершинах правильного  $n$ -угольника равно значению  $P$  в центре многоугольника, если  $n \geq k$ .

б) Докажите, что  $\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \notin \mathbb{Q}$ .

**Задача 23.** Пусть  $z, v, w \in \mathbb{C}$ , причём  $z + v + w = z^2 + v^2 + w^2 = z^3 + v^3 + w^3 = 0$ . Верно ли, что  $z^4 + v^4 + w^4 = 0$ ?

**а)**  $z^n + 1 = 0$ ; **б)**  $|z - i| \leq 2$ ; **в)**  $|z - 1| = 2|z - i|$ ; **г)**  $z^2 + \bar{z}^2 = 4$ ,  
**д)**  $|z - 1| - |z + 1| \leq 3$ ; **е)**  $|z - 1| + |z + 1| = 3$ ; **ж)**  $z + \bar{z} = 2|z - 1|$ .

а)  $z \mapsto \bar{z}$ ; б)  $z \mapsto (\cos \varphi + i \sin \varphi)z$ , где  $\varphi \in \mathbb{R}$ ;  
в)  $z \mapsto \lambda z$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}$ ; г)  $z \mapsto wz$ , где  $w \in \mathbb{C}$ ?

- а) ортогональную проекцию на ось  $x$ ;
- б) симметрию относительно оси  $y$ ;
- в) центральную симметрию с центром  $A$ ;
- г) поворот на угол  $\varphi$  относительно точки  $A$ ;
- д) гомотетию с коэффициентом  $k$  и центром  $A$ ;
- е) симметрию относительно прямой  $y = 3$  со сдвигом на 1 влево;
- ж) поворот, переводящий ось  $x$  в прямую  $y = 2x + 1$ ;
- з) симметрию относительно прямой  $y = 2x + 1$ .

б) полярную координатную сетку; в) окружность  $|z + i| = 1$ ;

**Задача 29.** Куда отображение  $z \mapsto \sqrt{z}$  переводит верхнюю полуплоскость (без границы)?

6)\* Тот же вопрос для отображения  $z \mapsto \frac{z + 1/z}{2}$ .

[illegible]