Листок №9 # Целые числа: алгоритм Евклида 02.2013

Определение 1. Два отрезка называются *соизмеримыми,* если они имеют *общую меру*— третий отрезок, который укладывается в каждом из них целое число раз.

Задача 1. Верно ли, что два отрезка соизмеримы тогда и только тогда, когда найдётся третий отрезок, в котором каждый из двух укладывается целое число раз?

Задача 2. Докажите, что a и b соизмеримы в том и только том случае, когда a и $a+2b$ соизмеримы.

Задача 3. От прямоугольника $a \times b$ отрезают квадраты со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника, пока это возможно. С оставшимся прямоугольником делают тоже самое, и т. д.

а) Сколько и каких квадратов получится, если $a = 324$, $b = 141$?

б) Докажите: если a и b соизмеримы, то прямоугольник разрежут на конечное число квадратов;

в) Докажите, что если в итоге прямоугольник разрежут на конечное число квадратов, то стороны прямоугольника соизмеримы, и сторона самого маленького квадрата является их общей мерой;

г) Докажите, что в пункте в) сторона последнего квадрата является *наибольшей* общей мерой сторон прямоугольника, и любая другая их общая мера укладывается в ней целое число раз.

Задача 4. От прямоугольника отрезали квадрат и получили прямоугольник, подобный исходному.

а) Соизмеримы ли его стороны? **б)** Найдите отношение сторон исходного прямоугольника.

Задача 5. Найдите наибольшую общую меру отрезков длиной $15/28$ и $6/35$.

Определение 2. *Наибольший общий делитель* (a, b) целых чисел a и b — это наибольшее целое число, делящее и a и b. Число (a, b) существует и единственно, если a и b не равны одновременно нулю (докажите!).

Задача 6. Докажите, что $(a, b) = (a - b, b) = (r, b)$, где r — остаток от деления a на b.

Задача 7. Найдите возможные значения **а)** $(n, 12)$; **б)** $(n, n+1)$; **в)** $(2n+3, 7n+6)$; **г)** $(n^2, n+1)$.

Задача 8. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник размерами $a \times b$ клеток (стороны лежат на линиях сетки). На сколько частей делят его диагональ **а)** узлы сетки; **б)** линии сетки?

Задача 9. Даны целые числа $a > b > 0$. *Алгоритм Евклида* можно описать так: делим a на b, получаем остаток $r_1 < b$, затем делим b на r_1, получаем остаток $r_2 < r_1$, делим r_1 на r_2, получаем остаток $r_3 < r_2$, и т. д. Докажите, что какой-то остаток r_{n-1} разделится нацело на r_n, и тогда $r_n = (a, b)$.

Задача 10. Найдите **а)** $(525, 231)$; **б)** $(7\,777\,777, 7\,777)$; **в)** $(10946, 17711)$; **г)*** $(2^m - 1, 2^n - 1)$.

Задача 11. Для каких пар чисел алгоритм Евклида работает «дольше всего» — каждый раз частное равно 1?

Задача 12. **а)** В обозначениях задачи 9 докажите, что каждое из чисел $r_1, r_2, \ldots$ представимо в виде $ax + by$ с целыми x и y. **б)** Как с помощью алгоритма Евклида найти такие целые x и y, что $ax + by = (a, b)$?

Задача 13. Докажите, что все общие делители целых чисел a и b — это все делители некоторого числа. Какого?

Задача 14. Какие расстояния можно отложить от данной точки на прямой, пользуясь двумя шаблонами (без делений) **а)** длины 6 см и 15 см; **б)** длины a см и b см (где $(a, b) = d$)?

Задача 15. Пусть целые числа a и b *взаимно просты* (то есть $(a, b) = 1$). Докажите, что

а) найдутся такие целые x и y, что $ax + by = 1$; **б)** если число c целое и ac делится на b, то c делится на b.

Задача 16. Решите в целых числах x, y уравнения **а)** $12x = 42y$; **б)** $ax + by = 0$, где $(a, b) = d$.

Задача 17. **а)** Докажите, что уравнение $ax + by = c$ имеет решение в целых числах x, y если и только если c делится на (a, b). **б)** Как найти одно из решений? **в)** Зная одно решение, найдите формулу для остальных.

Задача 18. Решите в целых x, y: **а)** $17x + 23y = 36$; **б)** $nx + (2n-1)y = 3$, n — целое; **в)** $525x - 231y = 42$.

Задача 19. Синим на числовой оси отметили числа, дающие при делении на 24 остаток 17, белым — дающие при делении на 40 остаток 7. Найдите наименьшее расстояние между белой и синей точками.

Задача 20. На плоскости дана фигура, которая при повороте вокруг точки O на угол 48° переходит в себя. Обязательно ли эта фигура переходит в себя при повороте вокруг O на угол **а)** 72°; **б)** 90°?

Задача 21. По окружности длины a см катится колесо длины b см (a и b натуральные, $(a, b) = d$). В колесо вбит гвоздь, он оставляет отметки на окружности. Сколько отметок оставит гвоздь?

Задача 22*. Решите в целых числах уравнение $2x + 3y + 5z = 11$.

Задача 23*. Даны m целых чисел. За один ход разрешается прибавить по единице к любым n из них. При каких m и n всегда можно за несколько таких ходов сделать числа одинаковыми?

Задача 24*. Натуральные числа m и n взаимно просты. Дробь $(m + 1000n)/(1000m + n)$ можно сократить на число d. Каково наибольшее возможное значение d?

Задача 25*. Натуральные числа a и b взаимно просты. Докажите, что уравнение $ax + by = c$

а) при любом целом c имеет такое решение в целых числах x и y, что $0 \leqslant x < b$;

б) имеет решение в целых неотрицательных числах x и y, если c целое, большее $ab - a - b$;

в) при целых c от 0 до $ab - a - b$ ровно в половине случаев имеет целое неотрицательное решение, причём если для $c = c_0$ такое решение есть, то для $c = ab - a - b - c_0$ таких решений нет.

1	2	3а	3б	3в	3г	4а	4б	5	6	7а	7б	7в	7г	8а	8б	9	10а	10б	10в	10г	11	12а	12б	13	14а	14б	15а	15б	16а	16б	17а	17б	17в	18а	18б	18в	19	20а	20б	21	22	23	24	25а	25б	25в

Листок №9 Целые числа: алгоритм Евклида 02.2013

	Фамилия, Имя	1	2	3 а	3 б	3 в	3 г	4 а	4 б	5	6	7 а	7 б	7 в	7 г	8 а	8 б	9	10 а	10 б	10 в	10 г *	11	12 а	12 б	13	14 а	14 б	15 а	15 б	16 а	16 б	17 а	17 б	17 в	18 а	18 б	18 в	19	20 а	20 б	21	22 *	23 *	24 *	25 а *	25 б *	25 в *
1.	Абрамов Владислав																																															
2.	Гальцев Даниил																																															
3.	Гончаренко Григорий																																															
4.	Данилина Арина																																															
5.	Жегусова Татьяна																																															
6.	Зайцев Тимофей																																															
7.	Захаров Павел																																															
8.	Келлер Владимир																																															
9.	Киктенко Даниил																																															
10.	Круглов Артем																																															
11.	Луценко Алексей																																															
12.	Миронов Николай																																															
13.	Молокоедов Александр																																															
14.	Нагайко Сергей																																															
15.	Потапенков Даниил																																															
16.	Рабинович Даниил																																															
17.	Смиренин Никита																																															
18.	Соловьёв Глеб																																															
19.	Спиридонов Игорь																																															
20.	Степаненко Александр																																															
21.	Талалай Михаил																																															
22.	Успенский Артём																																															
23.	Хакимов Артём																																															
		1	2	а 3	б 3	в 3	г 3	а 4	б 4	5	6	а 7	б 7	в 7	г 7	а 8	б 8	9	а 10	б 10	в 10	г 10	11	а 12	б 12	13	а 14	б 14	а 15	б 15	а 16	б 16	а 17	б 17	в 17	а 18	б 18	в 18	19	а 20	б 20	21	22	23	24	а 25	б 25	в 25