Определение 1. Пусть n и k — целые числа, $k \neq 0$. Говорят, что n *делится* на k, если найдётся такое целое m, что $n = k \cdot m$. Обозначение: $n \vdots k$. При этом говорят ещё, что n *кратно* k или что k *делит* n ($k \mid n$).

Задача 1. **а)** Докажите, что $m(m+1)(m+2)$ делится на 6 при любом целом m.
б) Докажите, что произведение любых n последовательных целых чисел делится на $n!$.

Задача 2. Верно ли, что **а)** если $n \vdots k$ и $k \vdots n$, то $n = k$;
б) если $b \vdots a$ и $c \vdots a$, но $d \not\vdots a$, то $b + c \vdots a$, но $b + d \not\vdots a$;
в) если $b \vdots a$ и $c \vdots b$, то $c \vdots a$;
г) если a и b не делятся на c, то ab не делится на c^2?

Задача 3. Пусть m, n — целые, и $5m + 3n \vdots 11$. Докажите, что
а) $6m + 8n \vdots 11$;
б) $9m + n \vdots 11$.

Задача 4. Докажите, что **а)** $\overline{aaa}$ делится на 37;
б) $\overline{abc} - \overline{cba}$ делится на 99 (где a, b, c — цифры).

Задача 5. **а)** Докажите, что целое число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры образуют число, кратное 4.
б) Найдите и докажите признаки делимости на 2, 5, 8, 10.

Задача 6. **а)** Из натурального числа $\overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ вычли сумму его цифр $a_n + \ldots + a_1 + a_0$. Докажите, что получилось число, делящееся на 9.
б) Выведите из пункта а) признаки делимости на 3 и на 9.

Задача 7. Сформулируйте и докажите признак делимости на 11.

Задача 8. Может ли $n!$ оканчиваться ровно на 4 нуля? А ровно на 5 нулей?

Задача 9. Сколькими нулями оканчивается число $11^{100} - 1$?

Задача 10. Целые числа a и b различны. Докажите, что $a^n - b^n \vdots a - b$ при любом натуральном n.

Задача 11. Найдите все целые n, при которых число $(n^3 + 3)/(n + 3)$ целое.

Задача 12. Решите в натуральных числах уравнения:
а) $x^2 - y^2 = 31$;
б) $x^2 - y^2 = 303$.

Определение 2. Натуральное число $p > 1$ называется *простым,* если оно имеет ровно два натуральных делителя: 1 и p, в противном случае оно называется *составным.*

Задача 13. Докажите, что любое натуральное число, большее 1, либо само простое, либо раскладывается в произведение нескольких простых множителей.

Задача 14. **а)** Даны целые числа $a_1, \ldots, a_n$, большие 1. Придумайте целое число, большее 1, которое не делится ни на одно из чисел $a_1, \ldots, a_n$.
б) Докажите, что простых чисел бесконечно много.
в) Докажите, что простых чисел вида $3k + 2$ бесконечно много (k — натуральное).

Задача 15. **а)** Могут ли 100 последовательных натуральных чисел все быть составными?
б) Найдутся ли 100 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых?

Задача 16*. Из чисел 1, 2, 3, …, 1000 выбрали произвольным образом 501 число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два числа, одно из которых делится на другое.

1 а	1 б	2 а	2 б	2 в	2 г	3 а	3 б	4 а	4 б	5 а	5 б	6 а	6 б	7	8	9	10	11	12 а	12 б	13	14 а	14 б	14 в	15 а	15 б	16