Математическая индукция— это способ доказать бесконечную серию занумерованных натуральными числами утверждений за два хода: 1) база индукции: доказываем первое утверждение;

- 2) *шаг индукции*: доказываем, что при любом натуральном n из n-го утверждения следует (n+1)-е.
- **Задача 1.** Докажите, что части, на которые n прямых делят плоскость, можно раскрасить в два цвета, так чтобы соседние части (имеющие общий отрезок или луч) были окрашены в разные цвета.
- **Задача 2.** Докажите, что  $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! 1$  при любом натуральном n.
- **Задача 3.** В компании из k человек ( $k \ge 4$ ) у каждого появилась новость, известная лишь ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за 2k-4 разговора все они могут узнать все новости.
- **Задача 4.** Известно, что  $a_1=1$  и  $a_{n+1}=2a_n+1$  при  $n\geqslant 1$ . Найдите  $a_n$ .
- **Задача 5.** Докажите, что при любом натуральном n **a)**  $2^n > n$ ; **б)**  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 \frac{1}{n}$ .
- **Задача 6.** Докажите неравенство Бернулли:  $(1+a)^n \geqslant 1+na$ , если  $a\geqslant -1$  и n натуральное число.
- Задача 7. Докажите, что модуль суммы любого числа слагаемых не больше суммы модулей этих слагаемых.
- **Задача 8.** Из клетчатого квадрата  $2^n \times 2^n$  клеток вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трёх клеток. («Уголок» это квадрат  $2 \times 2$  без одной клетки.)
- **Задача 9.** Найдите ошибку в рассуждении: «Докажем, что в любом табуне все лошади одной масти. Воспользуемся индукцией по числу лошадей в табуне. Если в табуне всего одна лошадь, то, разумеется, все лошади в этом табуне одной масти. Предположим теперь, что в любом табуне из n лошадей все лошади одной масти. Рассмотрим произвольный табун из n+1 лошади. По предположению индукции любые n лошадей в этом табуне одной масти. Поэтому все лошади в табуне одной масти.»
- **Задача 10.** Верна ли теорема: «Если треугольник разбит отрезками на треугольники, то хотя бы один из треугольников разбиения не остроугольный»? Вот её доказательство (нет ли в нём ошибки?):
- «1. Если треугольник разбит отрезком на два треугольника, то один из них не остроугольный (ясно).
- 2. Пусть имеется треугольник, как-то разбитый на n треугольников. Проведём ещё один отрезок, разбив один из маленьких треугольников на два. Получим разбиение на n+1 треугольник, причём один из двух новых треугольников будет не остроугольный. По индукции теорема доказана.»
- **Задача 11.** На какое максимальное число частей могут разбить плоскость **a)** n прямых; **б)** n окружностей? **в)\*** На какое максимальное число частей могут разбить пространство n плоскостей?

Есть разные варианты индукции. Иногда в качестве шага приходится проверять, что n-е утверждение верно если верны ece предыдущие. Другой вариант: предположим, что не все утверждения верны. Тогда есть naumentumee натуральное n, для которого n-е утверждение неверно. Если из этого выводится противоречие, то все утверждения верны.

- **Задача 12.** Докажите, что уравнение  $n^2 = 2m^2$  не имеет решений в натуральных числах.
- **Задача 13.** Докажите, что любое натуральное число можно представить как сумму нескольких разных степеней двойки (возможно, включая и нулевую).
- **Задача 14.** Число  $x + \frac{1}{x}$  целое. Докажите, что  $x^n + \frac{1}{x^n}$  тоже целое при любом натуральном n.
- Задача 15. (Xанойские башни) Есть детская пирамида с n кольцами и два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но нельзя класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что **a)** можно переложить все кольца на один из пустых стержней; **б)** можно сделать это за  $2^n 1$  перекладываний; **в)** меньшим числом перекладываний не обойтись.
- **Задача 16\*.** Докажите, что для любого натурального n > 3 число n! можно разложить на два множителя, отношение которых будет не меньше 2/3 и не больше 3/2.
- **Задача 17\*.** На кольцевой автотрассе стоят несколько машин. Общего количества бензина в этих машинах достаточно для того, чтобы одной машине объехать всю трассу. Докажите, что одна из машин действительно сможет объехать трассу, забирая по дороге бензин у других машин.
- **Задача 18\*.** k воров хотят поделить добычу. Каждый уверен, что он поделил бы добычу на равные части, но остальные ему не верят. Как действовать ворам, чтобы после раздела каждый был уверен, что у него не менее  $\frac{1}{k}$  части добычи? Разберите случаи: **a)** k=2; **b)** k=3; **в)** k- любое.
- **Задача 19\*.** При каких n гири весом  $1, 2, \ldots, n$  кг можно разложить на три равные по весу кучи?
- **Задача 20\*.** Двое играют в игру, исход которой не зависит от случая. Ходят по очереди, по правилам игра длится не более n ходов. Ничьих нет. Докажите, что у кого-то есть выигрышная стратегия.

1	2	3	4	5 a	5 6	6	7	8	9	10	11 a	11 б	11 B	12	13	14	15 a	15 б	15 B	16	17	18 a	18 б	18 B	19	20