Задача 1. В классе учатся 20 человек. Сколькими способами из них можно выбрать двоих школьников: старосту и ответственного за проездные билеты? А просто двоих школьников?

Задача 2. Сколько разных слов (не только осмысленных) можно получить, переставляя буквы в словах **а)** РОК; **б)** КУРОК; **в)** КОЛОБОК; **г)** $\underbrace{\text{АА}\ldots\text{А}}_{a}\underbrace{\text{ББ}\ldots\text{Б}}_{b}$? **д)*** $\underbrace{\text{ы}_1\ldots\text{ы}_1}_{k_1}\underbrace{\text{ы}_2\ldots\text{ы}_2}_{k_2}\ldots\ldots\underbrace{\text{ы}_m\ldots\text{ы}_m}_{k_m}$.

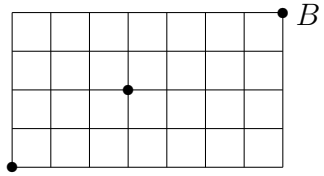
Задача 3. **а)** Сколькими способами можно выбрать трёх дежурных в классе из 20 человек?
б) А сколькими способами можно выбрать старосту, его помощника и трёх дежурных?

Определение 1. *Числом сочетаний из n элементов по k* называется количество способов выбрать k предметов из n различных предметов. Обозначение: $\binom{n}{k}$ или C_n^k (читается «це из n по k»).

Задача 4. Докажите, что **а)** $C_n^k = C_n^{n-k}$; **б)** $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

Задача 5. Найдите формулу для C_n^k.

Задача 6. **а)** На рисунке изображен план города (линии — это улицы, пересечения линий — перекрестки). На улицах введено одностороннее движение: можно ехать только «вверх» или «вправо». Сколько разных маршрутов ведёт из точки A в точку B?



б) Сколько из этих маршрутов не проходят через отмеченную на плане точку внутри города?

Задача 7. Сколькими способами можно рассадить класс, если пришло 27 человек, а мест 30?

Задача 8. Сколькими способами можно высадить в ряд 3 груши и 4 яблони?

Определение 2. *Треугольником Паскаля* называют числовой треугольник, изображенный на рисунке (по краям треугольника стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух, стоящих справа и слева над ним).

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      .   .   .   .   .   .
```

Задача 9. На рисунке выписаны первые 5 строк треугольника Паскаля. Напишите следующие 5 строк.

Задача 10. Докажите, что k-ое число n-ой строки равно C_n^k (строки нумеруются сверху вниз, начиная с нуля, а числа в строках нумеруются слева направо, также начиная с нуля).

Задача 11. Докажите, что сумма чисел в n-ой строке треугольника Паскаля равна 2^n.

Задача 12. **а)** Раскройте скобки и приведите подобные в выражениях $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$. **б)** (*Бином Ньютона*) Раскроем скобки и приведём подобные в выражении $(a+b)^n$. Возьмём любое слагаемое. Оно имеет вид $C \cdot a^k \cdot b^{n-k}$ (почему?). Докажите, что $C = C_n^k$.

Задача 13. Докажите: **а)** $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n = n2^{n-1}$; **б)** $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Задача 14. Возьмём любое число C в треугольнике Паскаля и сложим все числа, начиная с него и идя по прямой направо-вверх. Докажите, что сумма равна числу, стоящему под C справа.

Задача 15. Выведите из задачи 14 формулы для сумм $1 + \ldots + n$, $T_1 + \ldots + T_n$, $П_1 + \ldots + П_n$.

Задача 16*. Как из предыдущей задачи вывести формулы для сумм $1^2 + \cdots + k^2$, $1^3 + \cdots + k^3$, $\ldots$?

Задача 17*. Отметьте в треугольнике Паскаля чётные числа. В каких строках все числа нечётные?

Задача 18*. Докажите, что $C_p^0 \cdot C_q^m + C_p^1 \cdot C_q^{m-1} + \cdots + C_p^{m-1} \cdot C_q^1 + C_p^m \cdot C_q^0 = C_{p+q}^m$.

Задача 19*. Докажите, что любые два не единичных числа из одной строки треугольника Паскаля имеют общий множитель, больший 1.

* * *

Задача 20. **а)** В НИИ работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 — немецкий, и 23 — оба языка. Сколько человек в НИИ не знают ни английского, ни немецкого языков?
б) Пусть кроме этого польский язык знают 20 человек, английский и польский — 12, немецкий и польский — 11, все три языка — 5. Сколько человек не знают ни одного из этих языков?

Задача 21. В ряд записали 105 единиц, поставив перед каждой знак «+». Сначала изменили знак на противоположный перед каждой третьей единицей, затем — перед каждой пятой, а затем — перед каждой седьмой. Найдите значение полученного выражения.

Задача 22. **а)** На полке стоят 10 книг. Сколькими способами их можно переставить так, чтобы ни одна книга не осталась на месте? **б)** А если на месте должны остаться ровно 3 книги?

1	2 а	2 б	2 в	2 г	2 д	3 а	3 б	4 а	4 б	5	6 а	6 б	7	8	9	10	11	12 а	12 б	13 а	13 б	14	15	16	17	18	19	20 а	20 б	21	22 а	22 б