Листок №2 — **Комбинаторика** — 09.2013

Задача 1. В школьной столовой 5 кранов для умывания. Каждый может быть закрыт или открыт. Сколькими способами может течь вода в столовой?

Задача 2. Некое современное здание имеет форму куба, стоящего на четырёх колоннах. Имеется 6 красок. Сколькими способами можно покрасить грани здания этими красками в 6 цветов? (Каждая грань красится целиком в один цвет, разные грани красятся в разные цвета.)

Задача 3. **а)** В заборе 20 досок, каждую надо покрасить в синий, зелёный или жёлтый цвет, причём соседние доски красятся в разные цвета. Сколькими способами это можно сделать?
б) А если требуется ещё, чтобы хоть одна из досок обязательно была синей?

Задача 4. **а)** Сколько можно составить различных (не обязательно осмысленных) слов из k букв, используя русский алфавит? **б)** А если потребовать, чтобы буквы в словах не повторялись?
в) Сколькими способами можно переставить буквы в слове из k различных букв?

Задача 5. **а)** Сколько существует 10-значных чисел, не содержащих цифру 1?
б) Сколько из них содержит цифру 9 (хотя бы одну)?

Задача 6. Сколько раз в записи целых чисел от 1 до 222222 встречается цифра 0?

Задача 7. **а)** Десять девушек водят хоровод. Сколькими способами они могут встать в круг?
б) Сколько ожерелий можно составить из 10 различных бусин?
в)* А если в ожерелье всего 3 белых и 7 синих бусин?

Задача 8. **а)** Сколько строк можно составить из 0 и 1, чтобы в каждой строке было 10 цифр? **б)** На дереве растут 10 яблок. Сколькими способами можно сорвать несколько из них?

Задача 9. Меню в школьном буфете постоянно и состоит из n разных блюд. Петя хочет каждый день выбирать себе завтрак по-новому (за раз он может съесть от 0 до n разных блюд).
а) Сколько дней ему удастся это делать? **б)** Сколько блюд он съест за это время?
в) Вася решил последовать примеру Пети, но съедать каждый день нечётное число блюд. Сколько дней ему удастся это делать? **г)** Сколько блюд он съест за это время?

Задача 10. Найдите коэффициенты при x^{17} и x^{18} после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении $(1+x^5+x^7)^{20}$.

Задача 11. **а)** Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 различных ладей так, чтобы они не били друг друга? **б)** Тот же вопрос про 8 неразличимых ладей.

Задача 12. **а)** Фабрика игрушек выпускает разноцветные кубики. У всякого кубика каждая грань окрашена целиком одной из шести красок, имеющихся на фабрике, причём все цвета присутствуют. Сколько видов кубиков выпускает фабрика? **б)** Та же задача, но есть всего пять красок.

Задача 13. Решите пункт а) предыдущей задачи, заменив куб на тетраэдр (и 6 цветов на 4).

Задача 14*. Даны два одинаково окрашенных кубика $1\times1\times1$ из пункта а) задачи 12. Сколько видов параллелепипедов $1\times1\times2$ можно получить, склеивая эти два кубика (по грани)?

Задача 15. На окружности отмечены десять различных точек. Сколько можно провести незамкнутых несамопересекающихся ломаных с вершинами во всех этих точках?

Задача 16. **а)** Какое наибольшее число неразличимых слонов можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга? **б)** Докажите, что число способов такой расстановки — квадрат целого числа. **в)*** Найдите это число. (Сначала решите задачу для досок 2×2, $4\times4\ldots$)

Задача 17. Сколько существует строк из 20 цифр, в которых встречаются только нули и единицы, причём никакие два нуля не стоят рядом?

Задача 18*. В таблицу размера $m\times n$ записывают числа $+1$ и -1 так, чтобы произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце равнялось 1. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 19*. **а)** «Чёртово колесо» состоит из p одинаковых кабинок (p — простое число). Каждую кабинку можно покрасить в один из n цветов. Сколько есть способов раскраски?
б) (*Малая теорема Ферма*) Выведите из предыдущего пункта, что n^p-n делится на p при любом натуральном числе n и любом простом числе p.

Задача 20*. Сколькими способами можно представить число 2013 в виде суммы нескольких натуральных слагаемых, любые два из которых равны или различаются не больше, чем на 1? (Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.)

1	2	3 а	3 б	4 а	4 б	4 в	5 а	5 б	6	7 а	7 б	7 в	8 а	8 б	9 а	9 б	9 в	9 г	10	11 а	11 б	12 а	12 б	13	14	15	16 а	16 б	16 в	17	18	19 а	19 б	20