# Комплексные функции

### Введение

В процессе развития математики постепенно происходило расширение числовых множеств:

$$\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \to \mathbb{C} \to \mathbb{H}$$

Было замечено, что комплексные числа — это очень хорошие числа, а комплексный анализ оказывается намного более красивым, нежели вещественный. Именно поэтому мы будем изучать комплекснозначные функции.

Переход от $\mathbb{R}$ к $\mathbb{C}$ открывает неожиданную связь между элементарными функциями $\exp z$, $\sin z$, $\cos z$, $\ln z$, $\arcsin z$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \ldots$. Её ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| \geqslant 1$, но она определена при $\forall\, x \in \mathbb{R}$. А теперь рассмотрим функцию $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. При $z = \pm i$ имеем $f = \infty$.

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. С вещественной точки зрения $z = x + iy$, и $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, т. е.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{f}{\longmapsto} \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}.$$

Все основные определения вещественного анализа — предел последовательности и функции, непрерывность, открытость, замкнутость, компактность, связность и односвязность — автоматически переносятся в комплексный анализ.

**Определение 1.** *Область* — открытое связное множество. *Окрестностью* точки называется произвольный открытый шар, её содержащий.

**Замечание 1.** Для комплексных функций теряет смысл понятие $\pm\infty$, ибо $\mathbb{C}$ — неупорядоченное поле.

### Комплексная производная

Пусть функция $f$ определена в некоторой окрестности точки $z$.

**Определение 2.** Функция $f$ называется $\mathbb{C}$-*дифференцируемой* в точке $z$, если существует предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} =: f'(z). \tag{1}$$

Дадим еще одно определение комплексной дифференцируемости:

**Определение 3.** Функция $f$ называется $\mathbb{C}$-*дифференцируемой* в точке $z$, если найдётся такая функция $\beta$, что

$$f(z + \Delta z) = f(z) + f'(z)\Delta z + \Delta z \cdot \beta(\Delta z), \tag{2}$$

причём $|\beta(\Delta z) \to 0|$ при $|\Delta z| \to 0$.

Равносильность этих определений очевидна.

**Пример 1.** Функция $f(z) = z$ — хорошая, $z' = 1$, а вот $f(z) = |z|^2$ — плохая. Функция $f(z) = \overline{z}$ тоже плохая. Примерами хороших функций также являются:

- Рациональная функция $f \in \mathbb{C}(z)$;
- Дробно-линейная функция $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$;
- Элементарные функции: $e^z$, $\sin z$, $\cos z$, $\ldots$, задаваемые рядами или формулой.

**Замечание 2.** У элементарных комплексных функций есть и новые свойства. Например, неограниченность: $\sin z$ неограничен. Также возникает проблема с обратными функциями в силу эффекта многозначности (например, $\sqrt{z}$ или $\ln z$).

**Задача 1.** Найдите, чему равно $i^i$.

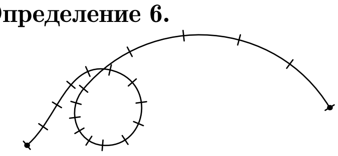
**Решение.** Имеем $i^i = e^{i \ln i} = \exp\left[i\big(\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\big)\right] = \exp\left[-\frac{\pi}{2} - 2\pi n\right]$. ■

### Интегрирование комплексных функций

**Определение 4.** Функция $F(z)$ называется *первообразной* по отношению к $f(z)$, если $F'(z) = f(z)$.

**Определение 5.** *Кривой* называется непрерывное отображение $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Говорят, что кривая *кусочно-гладкая*, если существует разбиение отрезка $[a,b]$ такое, что на каждом интервале разбиения отображение $\gamma$ непрерывно дифференцируемо, и в концах отрезков разбиения существуют односторонние пределы производной $\gamma'$ (быть может, различные).

**Определение 6.**



Пусть $\gamma(t)$ — непрерывная кривая, соединяющая точки $A$ и $B$, а $T$ — разбиение отрезка её параметризации $a = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = b$. Через $\lambda_T$ обозначим диаметр разбиения $T$. Положим $z_j := \gamma(t_j)$. Рассмотрим интегральную сумму

$$S(T) := \sum_{j=1}^{n} f\big(\gamma(t_j^*)\big)\,(z_j - z_{j-1})\,, \tag{3}$$

где $t_j^* \in [t_{j-1}, t_j]$ и $\zeta_j = \gamma(t_j^*)$. *Интегралом* от функции $f$ по кривой $\gamma$ называется число

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz := \lim_{\lambda_T \to 0} S(T). \tag{4}$$

**Определение 7.** Кривая называется *спрямляемой*, если её длина конечна, т. е. существует предел

$$|\gamma| := \sup_{T} \sum_{j=1}^{n} |z_j - z_{j-1}|\,. \tag{5}$$

Напомним некоторые свойства спрямляемых кривых.

Теорема 1. (критерий спрямляемости) *Кривая $\gamma = z(t)$ спрямляема тогда и только тогда, когда $z(t)$ — функция ограниченной вариации.*

Теорема 2. *Если кривая $\gamma = z(t)$ спрямляема, то $z(t)$ дифференцируема почти всюду.*

**Утверждение 1.** Если функция $f$ непрерывна, а кривая $\gamma$ спрямляема, то $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$ существует.

### Свойства интеграла

1° Линейность (следует из свойств вещественных интегралов):

$$\int\limits_{\gamma} \big(af(z) + bg(z)\big)dz = a\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz + b\int\limits_{\gamma} g(z)\,dz. \tag{6}$$

2° Аддитивность относительно кривой: если $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz. \tag{7}$$

3° Независимость от параметризации: если $\gamma = \{z(t) \mid t \in [a,b]\}$, а $t = \varphi(\tau)$ и $\widetilde{\gamma} = \big\{z\big(\varphi(\tau)\big) \mid \tau \in [\alpha,\beta]\big\}$, где $\varphi$ — непрерывная функция, такая что $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$, то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\widetilde{\gamma}} f(z)\,dz. \tag{8}$$

4° Смена ориентации кривой (параметризация в обратном направлении) меняет знак интеграла.

5° Оценка интеграла:

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_{a}^{b} f(z)z'(t)\,dt\right| \leqslant \max|f| \underbrace{\int\limits_{a}^{b} |z'(t)|\,dt}_{\text{длина}} = \max_{\gamma}|f|\cdot|\gamma|. \tag{9}$$

**Пример 2.**

$$\int\limits_{\gamma} 1\,dz = \int\limits_{a}^{b} z'(t)\,dt = z(b) - z(a),$$

$$\int\limits_{\gamma} z\,dz = \int\limits_{a}^{b} z(t)z'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{a}^{b} \big(z^2(t)\big)'dt = \frac{z^2(b) - z^2(a)}{2}.$$

### Формула Ньютона – Лейбница

Теорема 3. (формула Ньютона – Лейбница) *Пусть $f$ непрерывна в односвязной области $D$, и $F$ — первообразная к $f$ в $D$; $\gamma = \{z(t) \mid t \in [a,b]\}$ — кусочно-гладкая кривая в $D$, соединяющая точки $A$ и $B$. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = F(B) - F(A). \tag{10}$$

□

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{a}^{b} f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt = \int\limits_{a}^{b} \frac{d}{dt}\left[F\big(z(t)\big)\right]\,dt = F\big(z(b)\big) - F\big(z(a)\big) = F(B) - F(A). \tag{11}$$

■

**Следствие 1.** Если первообразная в односвязной области существует, то интеграл по замкнутому контуру, целиком лежащему в этой области, равен нулю.

**Пример 3.** Покажем, что односвязность важна:

$$\int\limits_{|z|=r} \frac{dz}{z} = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,dt = 2\pi i \neq 0. \tag{12}$$

### Лемма Гурса

**Утверждение 2.** Если интеграл от непрерывной функции $f$ по любому замкнутому контуру в области $D$ равен нулю, то $f$ обладает первообразной.

□ Пусть $\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$ для $\forall\,\gamma$. Рассмотрим функцию

$$F(z) := \int\limits_{a}^{z} f(\zeta)\,d\zeta. \tag{13}$$

Интеграл здесь понимается как интеграл по кривой из точки $a$ в точку $z$. Покажем, что такое задание функции корректно, т. е. не зависит от выбора пути интегрирования. Пусть мы пошли другим путём $\widetilde{\gamma}$ из $z$ в $a$. Тогда интеграл по контуру $\gamma \cup \widetilde{\gamma}$, т. е. по $\gamma$ (от $a$ до $z$), а потом по $\widetilde{\gamma}$ (от $z$ до $a$) будет равен нулю. Но это и значит, что

$$(\gamma) \int\limits_a^z f(\zeta)\,d\zeta = -(\widetilde{\gamma}) \int\limits_z^a f(\zeta)\,d\zeta = (\widetilde{\gamma}) \int\limits_a^z f(\zeta)\,d\zeta. \tag{14}$$

Таким образом, в качестве пути интегрирования можно выбрать отрезок прямой.

Теперь покажем, что $F$ является первообразной для $f$. Пусть $\Delta z$ столь мало, что $z + \Delta z$ не вылезает за пределы области. Имеем

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \left( \int\limits_a^{z+\Delta z} - \int\limits_a^{z} \right) f(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{\Delta z} \int\limits_z^{z+\Delta z} f(\zeta)\,d\zeta = (*). \tag{15}$$

Так как $f$ непрерывна, то $f(\zeta) = f(z) + \alpha(\zeta)$. Тогда данное равенство преобразуется к виду

$$(*) = \frac{1}{\Delta z} \left( \int\limits_z^{z+\Delta z} f(z)\,d\zeta + \int\limits_z^{z+\Delta z} \alpha(\zeta)\,d\zeta \right) = f(z) + \frac{1}{\Delta z} \int\limits_z^{z+\Delta z} \alpha(\zeta)\,d\zeta. \tag{16}$$

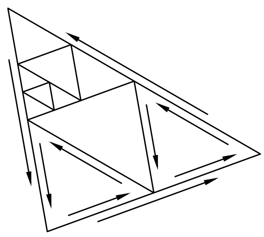
Покажем, что второе слагаемое есть $o(1)$ при $\Delta z \to 0$. По оценочному свойству интеграла оно не превосходит длины пути интегрирования (т. е. $|\Delta z|$), умноженной на $\max|\alpha|$. Но оба множителя стремятся к нулю при $\Delta z \to 0$. Значит, $F'(z) = f(z)$. ■

Лемма 1. (E. Goursat) *Пусть $\triangle$ — треугольник, лежащий в области $D$ вместе с внутренностью, и $f$ голоморфна в окрестности $\triangle$. Тогда*

$$\int\limits_{\triangle} f(z)\,dz = 0. \tag{17}$$

□ Обозначим $\triangle_0 := \triangle$, $P_0$ — периметр $\triangle_0$, а

$$I_0 := \Big| \int\limits_{\triangle} f(z)\,dz \Big|. \tag{18}$$



Поделив стороны $\triangle_0$ пополам и соединив между собой точки деления, получим ещё четыре треугольника. Интеграл по всему контуру равен сумме интегралов по всем четырём треугольникам. Значит, хотя бы одно слагаемое не меньше четверти интеграла $I_0$. Обозначим его $I_1$, а соответствующий контур — через $\triangle_1$. Итак, имеем

$$I_1 := \Big| \int\limits_{\triangle_1} f(z)\,dz \Big| \geqslant \frac{I_0}{4}. \tag{19}$$

Продолжая процесс, получим последовательность вложенных треугольников $\triangle_0 \supset \triangle_1 \supset \ldots \supset \triangle_n \to a$, где $a$ — некоторая точка в треугольнике, причём

$$I_n \geqslant \frac{I_0}{4^n}. \tag{20}$$

Имеем $f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + o(z-a) = f(a) + f'(a)(z-a) + \alpha(z)(z-a)$. У линейной функции $f'(a)(z-a)$ есть первообразная, поэтому её интеграл по $\triangle_n$ равен нулю. Значит, вклад в интеграл может дать только нелинейное слагаемое $o(\ldots)$. Далее заметим, что $(z-a)$ не превосходит периметра треугольника, по которому мы интегрируем. Учитывая это, имеем

$$\frac{I_0}{4^n} \leqslant I_n = \Big| \int\limits_{\triangle_n} o(z-a)\,dz \Big| = \Big| \int\limits_{\triangle_n} \alpha(z)(z-a)\,dz \Big| \leqslant \frac{P_0}{2^n} \cdot \frac{P_0}{2^n} \max_{\triangle_n} |\alpha(z)| \to 0. \tag{21}$$

Умножая неравенство на $4^n$, получаем $I_0 \leqslant P_0^2 \cdot \max\limits_{\triangle_n} |\alpha(z)| \to 0$. Значит, $I_0 = 0$. ■

**Следствие 2.** Если $D$ — односвязная область, а $f(z)$ голоморфна в $D$ и $\gamma$ — замкнутая ломаная в $D$, то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0. \tag{22}$$

□ Разобьём многоугольник, образованный ломаной, на треугольники. По лемме Гурса интеграл по каждому из них равен нулю, но ориентации на «стыках» разные, поэтому суммарный интеграл равен нулю. ■

**Следствие 3.** Если область $D$ односвязна, $f$ голоморфна в $D$, то у $f$ существует первообразная в $D$.

□ Покажем, что интеграл по любому кусочно-гладкому контуру равен нулю. Рассмотрим произвольную замкнутую кривую в области, аппроксимируем её звеньями ломаных. Для замкнутой ломаной по первому следствию интеграл равен нулю. Значит, для кривой он тоже равен нулю. ■

**Следствие 4.** (*интегральная теорема Коши*) Если $D$ — односвязная область, и $f(z)$ голоморфна в $D$, а $\gamma$ — кусочно-гладкий контур в $D$, то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0. \tag{23}$$

Сформулируем ещё один вариант интегральной теоремы Коши:

Теорема 4. (Коши) *Пусть $D$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, а функция $f(z)$ голоморфна в $D$ и $f \in \mathbf{C}^1(\overline{D})$. Тогда*

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 0. \tag{24}$$

**Замечание 3.** Условия теоремы заведомо выполнены, если $f(z)$ голоморфна в окрестности $\overline{D}$.

### Формула Коши

Теорема 5. (Интегральная формула Коши) *Пусть $D$ — область с кусочно-гладкой границей $\gamma$, и $f(z)$ голоморфна в окрестности $\overline{D}$. Тогда*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{25}$$

□ Пусть пока область $D$ односвязна. Фиксируем точку $z \in D$. Рассмотрим область $D_\varepsilon := D \setminus \overline{C}_\varepsilon$, где $C_\varepsilon$ — круговая окрестность точки $z$ радиуса $\varepsilon$. Рассмотрим функцию $g(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$. Она будет голоморфной в окрестности $D_\varepsilon$ как частное двух голоморфных функций, так как мы исключили $z$ из области рассмотрения.

Граница $C_\varepsilon$ ориентирована по-другому, значит,

$$\int\limits_{\partial D_\varepsilon} g\,d\zeta = \int\limits_{\partial D} g\,d\zeta - \int\limits_{\partial C_\varepsilon} g\,d\zeta. \tag{26}$$

Так как функция $g$ голоморфна в $D_\varepsilon$, то применима обычная теорема Коши, и следовательно, левая часть обращается в нуль.

Имеем $f(\zeta) = f(z) + \alpha(\zeta)$, следовательно,

$$\int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \int\limits_{\partial C_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \int\limits_{\partial C_\varepsilon} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta + \int\limits_{\partial C_\varepsilon} \frac{\alpha(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{27}$$

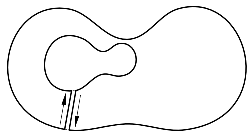
Первое слагаемое равно $f(z) \cdot \int\limits_{\partial C_\varepsilon} \frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta = f(z) \cdot 2\pi i$. Отметим, что оно не зависит от $\varepsilon$. Покажем, что второе слагаемое стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$. Функция $\alpha(\zeta)$ является бесконечно малой при $\varepsilon \to 0$, а длина контура интегрирования равна $2\pi\varepsilon$. Поэтому имеем

$$\Big| \int\limits_{\partial C_\varepsilon} \frac{\alpha(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \Big| = O(\varepsilon) \to 0. \tag{28}$$

Как было замечено, предельный переход не испортит первого слагаемого, так как в нем никакого $\varepsilon$ нет. Таким образом, $\int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z)\cdot 2\pi i$, что и требовалось. ■

А теперь обобщим теорему на случай неодносвязной области. Идея доказательства проста: перейти от многосвязного контура к односвязному, сделав достаточное количество «разрезов». На берегах разрезов ориентация противоположная, поэтому значение интеграла по границе не изменится.

**Определение 8.** Пусть граница области состоит из конечного числа замкнутых кривых $\gamma_0, \ldots, \gamma_n$. Пусть внешняя граница $\gamma_0$ ориентирована против часовой стрелки, а все остальные — по часовой стрелке, то есть при обходе контура область остаётся слева. Такую границу мы будем называть *ориентированной.*



Докажем индукцией по числу компонент $\gamma_i$. Покажем, как можно уменьшить их число, не изменив значение интеграла. Фиксируем точку $X$ на границе $\gamma_0$ и точку $Y$ на границе $\gamma_1$. Как мы уже знаем, область линейно связна. Поэтому существует путь из точки $X$ в точку $Y$ внутри области. Выкинем из области этот путь вместе с маленьким «каналом» сколь угодно малой ширины, тогда число компонент границы уменьшится. Теперь посмотрим, что будет с интегралом. У нас добавится две кривые: от $X$ до $Y$ по одной стороне канала, и от $Y$ до $X$ по другой. Направление обхода на них противоположное, поэтому никакого суммарного вклада в интеграл они не дадут. Продолжая далее разрезать область, придём к односвязному контуру, для которого теорема верна.

**Замечание 4.** Конечно, «дырок» в области может быть много больше, чем на рисунке, да и разрез может быть существенно кривее. Но суть дела от этого не поменяется.

### Следствия интегральной формулы

Теорема 6. (о разложении в ряд) *Пусть $f(z)$ голоморфна в области $D$. Фиксируем точку $a \in D$. Пусть $r < \operatorname{dist}(a, \partial D)$. Тогда функция $f(z)$ разлагается в степенной ряд*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \ \text{где } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta. \tag{29}$$

*Этот ряд сходится абсолютно и равномерно при $|z-a| < r$.*

□ Представим дробь $\frac{1}{\zeta - z}$ в виде суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} = \frac{1}{\zeta - a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}. \tag{30}$$

Обозначим через $C$ окружность радиуса $r$ с центром в точке $a$. Пусть $|\zeta - a| = r$, т. е. $\zeta$ бегает по окружности $C$. Если $|z-a| < r$, то $\frac{|z-a|}{|\zeta - a|} = \frac{|z-a|}{r} < 1$. Значит, в открытом круге радиуса $r$ ряд сходится равномерно и его можно почленно интегрировать.

Представим функцию $f(z)$ формулой Коши, взяв в качестве контура окружность $C$, а затем подставим в интеграл выражение для дроби $\frac{1}{\zeta - z}$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta\cdot(z-a)^n. \tag{31}$$

Обозначая выражение в скобках через $c_n$, получаем утверждение теоремы. ■

**Следствие 5.** (*Неравенство Коши*) Пусть выполнены условия теоремы, и $C_r$ — окружность радиуса $r$ с центром в точке $a$. Пусть $\max\limits_{C_r}|f(z)| = M$. Тогда $|c_n| \leqslant \frac{M}{r^n}$.

□ Имеем

$$|c_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r = \frac{M}{r^n}. \tag{32}$$

■

**Следствие 6.** (*Теорема Лиувилля*) Если $f(z)$ голоморфна в $\mathbb{C}$ и ограничена, тогда $f(z) \equiv \text{const}$.

□ Пусть $|f(z)| \leqslant M$. Голоморфность в $\mathbb{C}$ означает голоморфность в круге сколь угодно большого радиуса $R$. По предыдущему следствию $|c_n| \leqslant \frac{M}{R^n}$ для $\forall R$, значит, $c_n = 0$ для $\forall n > 0$. Следовательно, $f = c_0$. ■

**Следствие 7.** (*Основная теорема алгебры*) Любой многочлен $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ положительной степени имеет в $\mathbb{C}$ хотя бы один корень.

□ Допустим противное, т. е. $P(z) \neq 0$ для $\forall z$. Тогда $|P(z)| \geqslant m > 0$. Тогда функция $f(z) := \frac{1}{P(z)}$ всюду определена, а значит, голоморфна в $\mathbb{C}$ и ограничена по модулю числом $\frac{1}{m}$. По теореме Лиувилля $f(z) = \mathrm{const}$. Значит, $P(z) = \mathrm{const}$. Противоречие. ■

### Степенные ряды

Рассмотрим степенные ряды вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Сделав подходящую замену, можно всё свести к рядам вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{33}$$

Лемма 2. (Абеля) *Рассмотрим ряд* (33). *Пусть* $|c_n z_0^n| \leqslant M$, *где* $z_0 \neq 0$. *Тогда* $\forall q \in (0, |z_0|)$ *этот ряд сходится абсолютно и равномерно при* $|z| \leqslant q$.

□ В самом деле,

$$|c_n z^n| = \left|c_n z_0^n\right| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant \left|c_n z_0^n\right| \cdot \left|\frac{q}{z_0}\right|^n < M \cdot \left|\frac{q}{z_0}\right|^n. \tag{34}$$

Если $\left|\frac{q}{z_0}\right| < 1$, ряд $\sum M\left|\frac{q}{z_0}\right|^n$ сходится (геометрическая прогрессия). Далее применим признак Вейерштрасса. ■

**Замечание 5.** Условие $|z| \leqslant q < |z_0|$ существенно. Рассмотрим ряд $\sum \frac{z^k}{k}$, $z_0 = 1$. Допустим, что он сходится равномерно при всех $z\colon |z| < 1$ и запишем условие Коши: $\forall \varepsilon > 0$ найдётся $N\colon \forall n, m > N, \forall z\colon |z| < 1$ имеем $\left|\sum\limits_{m}^{n} \frac{z^k}{k}\right| < \varepsilon$. Перейдём к пределу при $z \to 1$. Тогда $\left|\sum\limits_{m}^{n} \frac{1}{k}\right| \leqslant \varepsilon$, а это противоречит расходимости $\sum \frac{1}{k}$.

По *формуле Коши – Адамара* радиус сходимости степенного ряда вычисляется так:

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{35}$$

Как и в вещественном случае, справедливо

**Утверждение 3.** Равномерно сходящиеся степенные ряды можно почленно дифференцировать и интегрировать без изменения радиуса сходимости. Если ряд из производных равномерно сходится, а ряд сходится хотя бы в одной точке, то эта сходимость равномерна, ряд сходится к дифференцируемой функции, и производная суммы равна сумме производных.

Из замечания уже должно быть понятно, что на границе круга сходимости может быть всё, что угодно.

### Эквивалентные определения голоморфности

Теорема 7. *Пусть $f(z)$ непрерывна в области $D$. Следующие 4 условия эквивалентны:*

1. *Для $\forall z \in D$ существует производная $f'(z)$.*
2. *$\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$ для любой замкнутой кривой $\gamma$, содержащейся вместе с внутренностью в $D$.*
3. *Для каждого простого замкнутого контура $\gamma$, содержащегося вместе с внутренностью в $D$ и для $\forall z \in \operatorname{Int}\gamma$ имеет место формула Коши* (2.25).
4. *Для $\forall a \in D$ найдётся $r > 0$ такое, что в круге $\Delta(a, r)$ функция $f(z)$ разлагается в ряд*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{36}$$

□ $1 \Rightarrow 2$ — по теореме Коши, $2 \Rightarrow 3$ — по формуле Коши, $3 \Rightarrow 4$ — по теореме о разложении в ряд. $4 \Rightarrow 1$: по соответствующей теореме ряд можно дифференцировать почленно, и радиус сходимости не изменится. ■