Задача 1. Докажите, что на $x-y$ делится **а)** x^n-y^n; **б)** $P(x,y)-P(x,x)$, где $P(x,y)$ — любой многочлен.

Определение 1. *Степень одночлена* ax^ny^m, где $a\neq 0$, — число $m+n$. *Степень многочлена* $A(x,y)$ — наибольшая из степеней его ненулевых одночленов (в записи, где «приведены подобные»). Обозначение: $\deg A(x,y)$.

Задача 2. Пусть $A(x,y)$, $B(x,y)$ — ненулевые многочлены. Докажите, что $\deg AB=\deg A+\deg B$.

Задача 3. Кривая задана многочленом $A(x,y)$ степени n. Докажите, что если она пересекает некую прямую $y=kx+b$ более, чем в n точках, то $A(x,y)$ делится на $y-kx-b$.

Задача 4. Дан многочлен $A(x,y)$ степени n. **а)** Докажите, что либо у системы $A(x,y)=0$, $x=y^2$ не более $2n$ решений, либо A делится на $x-y^2$ (геометрический смысл: кривая A либо пересекает параболу не более чем в $2n$ точках, либо содержит в себе параболу). **б)** Докажите то же самое для системы $A(x,y)=0$, $xy=1$.

Задача 5. Вершины четырёхугольника $ABCD$ лежат на параболе $y=x^2$. Пусть прямые AB, BC, CD, DA задаются многочленами первой степени $l_1(x,y)$, $m_1(x,y)$, $l_2(x,y)$, $m_2(x,y)$ соответственно. Рассмотрим кривую H с уравнением $\lambda l_1l_2+\mu m_1m_2=0$, где λ, $\mu\in\mathbb{R}$. Докажите, что **а)** H проходит через A, B, C, D; **б)** можно подобрать λ, μ так, чтобы H пересекалась с параболой ещё в одной точке и совпадала бы с параболой.

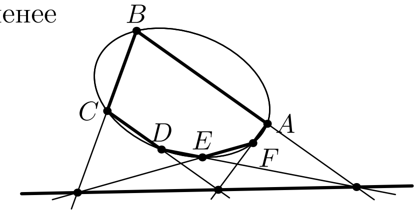
Задача 6. Можно ли на плоскости задать многочленом в точности одну из ветвей гиперболы $xy=1$?

Задача 7. (*Замена координат*) На плоскости Oxy рассмотрим непараллельные прямые $l_1(x,y)=0$ и $l_2(x,y)=0$ (где l_1 и l_2 — многочлены первой степени). Примем их за новые оси координат: l_1 — за ось z, а l_2 — за ось t (их пересечение O_1 — за начало). Тогда l_1 и l_2 имеют в новых координатах уравнения $t=0$, $z=0$ соответственно. **а)** Докажите, что можно так выбрать базисные вектора на осях O_1z, O_1t, что новые координаты (z,t) точки будут вычисляться через её старые координаты (x,y) по формулам $z=l_2(x,y)$, $t=l_1(x,y)$. **б)** Докажите, что из уравнений $z=l_2(x,y)$, $t=l_1(x,y)$ можно выразить старые координаты x и y через новые z и t. **в)** Пусть $A(x,y)$ — многочлен. Подставив в него вместо x и y их выражения через z и t, получим запись многочлена A в новых координатах z, t. Докажите, что при этом степень многочлена не изменится: $\deg A(x,y)=\deg A(z,t)$.

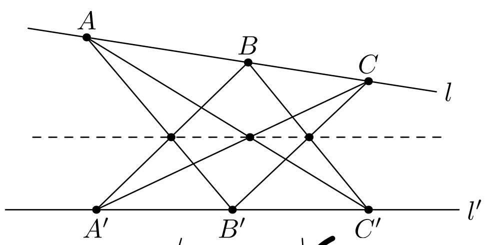
Задача 8. Докажите, что кривая, заданная уравнением $x^2+2xy+y^2+\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+1=0$, имеет ось симметрии.

Задача 9. **а)** Две кривые пересекаются в конечном числе точек. Докажите, что в некоторой системе координат у них нет общих точек с одинаковыми ординатами. **б)*** Решите задачу 3 для системы $A(x,y)=0$, x^2+y^2-1.

Задача 10. Пусть шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность $x^2+y^2=1$, прямые AB, BC, CD, DE, EF, FA задаются многочленами первой степени l_1, m_1, l_2, m_2, l_3, m_3 соответственно. Рассмотрим кривую H с уравнением $\lambda l_1l_2l_3+\mu m_1m_2m_3=0$, где λ, $\mu\in\mathbb{R}$. Докажите, что **а)** H содержит все вершины шестиугольника; **б)** можно подобрать ненулевые λ, μ так, чтобы H имела с окружностью не менее 7 общих точек; **в)** полученная в пункте б) кривая H делится на x^2+y^2-1.
Замечание. Задачу можно сдать для параболы (гиперболы), если не сдана 9б.

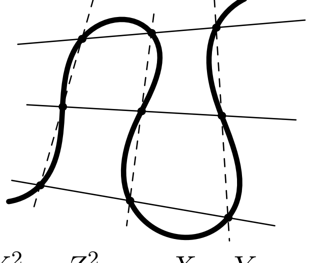


Задача 11. (*Теорема Паскаля*) Пусть $ABCDEF$ вписан **а)** в окружность; **б)** в гиперболу или в параболу. Докажите, что точки пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на одной прямой.



Задача 12. (*Теорема Паппа*) Пусть точки A, B, C и A', B', C' лежат на прямых l и l' соответственно. Докажите, что тогда точки пересечения прямых AB' и $A'B$, BC' и $B'C$, CA' и $C'A$ лежат на одной прямой.

Задача 13. Три пунктирные прямые пересекают три сплошные прямые в девяти точках (см. рисунок). Докажите, что если 8 из этих точек лежат на некоторой *кубике* (кривой, задающейся многочленом третьей степени), то и оставшаяся девятая точка лежит на той же кубике.



Задача 14. **а)** Для каждого t найдите точки пересечения прямой $y=1-xt$ с окружностью $x^2+y^2=1$. **б)** Докажите, что все точки этой окружности, кроме $(0,-1)$, задаются параметрически в виде $\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$, $t\in\mathbb{R}$. **в)** Докажите, что все рациональные точки этой окружности, кроме $(0,-1)$, получаются по формулам предыдущего пункта при $t\in\mathbb{Q}$.

Задача 15. Выведите из задачи 14 **а)** формулы пифагоровых троек: если $X^2+Y^2=Z^2$, где X и Y взаимно просты и X чётно, то $X=2mn$, $Y=m^2-n^2$, $Z=m^2+n^2$ для каких-то взаимно простых m и n; **б)*** задачу 9б.

Задача 16. (*М.Берже, С.Маркелов*) На плоскости даны парабола p и окружность ω, у них ровно 2 общие точки A и B. Касательные к p и ω в точке A совпадают. Обязательно ли касательные к p и ω в точке B совпадают?

1 а	1 б	2	3	4 а	4 б	5 а	5 б	6	7 а	7 б	7 в	8	9 а	9 б	10 а	10 б	10 в	11 а	11 б	12	13	14 а	14 б	14 в	15 а	15 б	16