Листок №68 Приложения математического анализа 20.09 – 01.10.2021

20/16/12 з. на 5/4/3

Задача 1. Спидометр на велосипеде считывает время, за которое колесо совершает один оборот. Какую величину в действительности он показывает и какую стремится показать? Зависит ли от скорости точность спидометра?

Задача 2. На координатной плоскости дан единичный отрезок AB. Для каждого α из промежутка $[0;\pi]$ пусть $f(\alpha)$ — длина проекции отрезка AB на прямую, выходящую из начала координат под углом α к оси абцисс. Найдите *вариацию* отрезка AB — среднее значение проекций AB по всем направлениям, то есть число

$$K = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\alpha)\,d\alpha.$$

Задача 3. **а)** Пусть точка движется по прямой так, что в момент времени t она имеет координату $x(t)$. Выразите скорость и ускорение точки в момент времени t_0 через функцию $x(t)$ и её производные?

б) Шпанская мушка летает по комнате так, что расстояние от неё до двух соседних стен и пола в момент времени t с — это $x(t)$ м, $y(t)$ м и $z(t)$ м соответственно. Найдите скорость мушки.

в) Пусть мушка летает по окружности радиуса R со скоростью v. Найдите её ускорение.

г) Пусть $x(t) = 4t$ м, $y(t) = 2t^2$ м, $z(t) = \frac{2t^3}{3}$ м. Найти расстояние, которое пролетит мушка за минуту.

д) Найти длину произвольного куска параболы $y = x^2$.

е)* Определите длину произвольной кривой $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $t \to (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, где функции x_i дифференцируемы. Проверьте, что для отрезка получается обычная длина.

Задача 4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $ax = y^2$, $ay = x^2$.

Задача 5. Пусть пара дифференцируемых функций $(x(t), y(t))$, $0 \leqslant t \leqslant T$ задаёт замкнутую несамопересекающуюся кривую, причём для любого x_0 существуют не более 100 чисел t_i, таких что $x(t_i) = x_0$. Кривая ограничивает область площади S. Докажите, что

$$S = \left|\int\limits_0^T y(t)x'(t)dt\right|$$

Задача 6. Окружность радиуса R катится по прямой с угловой скоростью ω. На окружности зафиксировали точку. Кривая, по которой движется эта точка, называется *циклоидой.* Задайте кривую параметрически (то есть в виде $(x(t), y(t))$) и найдите площадь одной арки циклоиды.

Задача 7. Найти массу проволоки длиной 100 м, если известно что плотность проволоки на расстоянии x м от конца равна $\rho(x)$ кг/м.

Задача 8. Пусть на прямой установлено несколько точечных весов с массами m_i и координатами x_i. Найти центр масс этой системы.

Задача 9. Найти центр масс стержня длины 10 м, если его плотность изменяется по закону $\rho(x) = 6+0,3x$ (кг/м), где x — расстояние до одного из его концов.

Задача 10. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной a р., и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости с коэффициентом пропорциональность α. При какой скорости v плавание судна будет наиболее экономичным, то есть затраты на один километр пути будут минимальными?

Определение 1. Пусть для каждой пары $(x,p) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ определено число $f(x,p)$. Тогда говорят, что на множестве Ω задана функция двух переменных x и p.

Задача 11. Определите непрерывность в точке для функций двух переменных.

1	2	3 а	3 б	3 в	3 г	3 д	3 е	4	5	6	7	8	9	10	11

Определение 2. Пусть на множестве $\{(x,p) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ p \in [\varphi(x), \psi(x)]\}$ задана непрерывная ограниченная функция $f(x,p)$. Тогда можно определить интеграл с параметром:

$$F(x) := \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,p)\,dp$$

Задача 12. Найти массу квадратной пластины размера 1×1, если её плотность на расстоянии x и y от соседних сторон равна $x^2y + y^2x + x^3\cos y$.

Задача 13. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = c^2x$, $z = 0$.

Задача 14. Доказать, что объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, заданной условием $0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant y(x)$, где $y(x)$ — непрерывная функция, равен $V = 2\pi \int\limits_a^b xy(x)\,dx$.

Задача 15. **а)** Найти объём шара радиуса R.
б) Определить центр масс однородного полушария радиуса R.
в) Найти площадь сферы радиуса R.
г)* Найти объём четырёхмерного шара радиуса R (фигуры, заданной уравнением $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \leqslant R^2$).
д)* Найти объём пятимерного шара радиуса R.
е)* Найти объём шестимерного шара радиуса R.

Задача 16*. С какой силой материальная бесконечная прямая постоянной плотности μ_0 притягивает материальную точку массы m, находящуюся на расстоянии a от этой прямой?

Задача 17*. Найти кинетическую энергию цилиндра высоты h радиуса R постоянной плотности ρ, вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью ω.

Определение 3. Функция $(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ называется *логарифмической производной* функции f.

Задача 18. Найти все решения дифференциального уравнения $f'(x) = f(x)$.

Задача 19*. Скорость распада радия в каждый момент времени пропорциональна его наличному количеству. В начальный момент был 1 кг радия. Найти с точностью до 50 лет время, за которое распадётся 0,999 кг радия, если известно, что через 1600 лет его количество уменьшится в два раза.

Задача 20*. Для остановки речных судов у пристани с них бросают канат, который наматывают на столб, стоящий на пристани. Какая сила будет тормозить судно, если канат делает три витка вокруг столба, коэффициент трения каната о столб равен $\frac{1}{3}$, и рабочий на пристани тянет за свободный конец каната с силой $10 \cdot g$ Н? (g — ускорение свободного падения) Скорость верёвки считать постоянной.
(*Указание:* Сила трения $F_{mp} = \mu \cdot N$, N можно найти для куска каната радианной меры $\Delta\varphi$, а силу можно выразить как функцию радианной меры угла φ.)

Задача 21*. Футбольный мяч весом 400г брошен вверх со скоростью 20 м/сек. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и равно 0,48г силы при скорости 1 м/сек. Вычислите время подъёма мяча и наибольшую высоту подъёма. Как изменятся эти результаты, если пренебречь сопротивлением воздуха?
(*Указание:* За неизвестную величину удобнее взять скорость.)

12	13	14	15 а	15 б	15 в	15 г	15 д	15 е	16	17	18	19	20	21