Листок №20д | Формула Тейлора | сентябрь 2021
27/20/13 з. на 5/4/3

Определение 1. Говорят, что функция $f(x)$ есть "о маленькое " от функции $g(x)$ (при $x \to a$), если существует такая функция $\alpha(x)$, что $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$ и $f(x) = g(x)\cdot\alpha(x)$. Обозначение: $f(x) = o(g(x))$.

Задача 1. Докажите, что $\sin x = o(1)$ и $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$; $x = o(x^2)$ при $x \to \infty$.

Определение 2. Пусть $M \subseteq \mathbb{R}$ — открытое множество. Функцию $f : M \to \mathbb{R}$ называют *n раз непрерывно дифференцируемой*, если на M существуют и непрерывны производные $f', f'', \ldots, f^{(n)}$. Множество таких функций обозначают $C^n(M)$. Множество функций, дифференцируемых на M любое число раз, обозначают $C^\infty(M)$.

Задача 2. Пусть $f \in C^n(\mathcal{U}_\varepsilon(x_0))$, $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$. Докажите, что
а) для любого $k < n$ и для любого $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ существует такое $\alpha \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$, что $f^{(k)}(x) = (x - x_0)f^{(k+1)}(\alpha)$;
б) для любого $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ существуют такие $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$, что
$$f(x) = (x - x_0)(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\ldots(x_{n-1} - x_0)f^{(n)}(x_n);$$
в) $f(x) = o((x - x_0)^n)$.

Задача 3. Пусть $f \in C^n(\mathcal{U}_\varepsilon(x_0))$. Докажите, что первые n производных в точке x_0 многочлена
$$P(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$
совпадают с первыми n производными в точке x_0 функции $f(x)$.

Задача 4. **а)** Пусть $f \in C^n(\mathcal{U}_\varepsilon(x_0))$. Докажите, что при любом $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ справедливо следующее равенство:
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$
(оно называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано).
б) Докажите, что выполнение равенства п. а) при любом $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ означает в случае $n = 0$ непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0, а в случае $n = 1$ — дифференцируемость функции $f(x)$ в точке x_0.

Задача 5. **а)** Пусть $f \in C^{n+1}(\mathcal{U}_\varepsilon(x_0))$. Докажите, что для любого $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ существует такое $\alpha \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$, что справедливо следующее равенство:
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$
(оно называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа).
б) Пусть $f \in C^\infty(\mathcal{U}_\varepsilon(x_0))$. Пусть $x \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ и существует такое число $c > 0$, что при любом $\alpha \in \mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$ и при любом $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $|f^{(n)}(\alpha)| < c$. Докажите, что тогда
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
(т. е. стоящий справа ряд (называемый рядом Тейлора с центром в x_0 функции f) сходится к $f(x)$.)

Задача 6. Напишите ряд Тейлора с центром в $\pi/6$ функции $\sin x$. Сходится ли он к $\sin x$ при $x \in \mathbb{R}$?

Задача 7. Напишите ряды Тейлора с центром в нуле для следующих функций: **а)** e^x; **б)** a^x $(a > 0)$; **в)** $\sin x$; **г)** $\cos x$; **д)** $\frac{1}{1-x}$; **е)** $\ln(1 + x)$; **ж)** $(1 + x)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$; **з)** $\operatorname{arctg} x$; **и)** $\arcsin x$; **к)** $\frac{1}{1+x^2}$.

Задача 8. **а)** Исследуйте сходимость полученного ряда Тейлора к соответствующей функции при $x \in \mathbb{R}$ в каждом из пунктов задачи 7. **б)** Нарисуйте в любой удобной программе графики нескольких функций и их многочленов Тейлора с центром в нуле (и посмотрите ролик: youtu.be/3d6DsjIBzJ4).

Задача 9. Докажите, что **а)** $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$; **б)** $e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}) < \frac{3}{(n+1)!}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и вычислите e с точностью до 10^{-5}; **в)** $|\sin x - (x - \frac{x^3}{6})| < 10^{-5}$ при $|x| < 1/4$.

Задача 10. Вычислите пределы: **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x - x(x+1)}{x^3}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \arcsin x}$.

Задача 11. Пусть $f(x) = e^{-1/x^2}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Найдите для f ряд Тейлора с центром в нуле.

Задача 12. Пусть $f \in C^\infty(\mathcal{U}_\varepsilon(0))$. Верно ли, что ряд Тейлора с центром в нуле для функции f
а) сходится при всех x из $\mathcal{U}_\varepsilon(0)$? **б)** если сходится при некотором x из $\mathcal{U}_\varepsilon(0)$, то обязательно к $f(x)$?

Задача 13*. Перестановка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$ называется *змеей* (длины n), если выполнены неравенства $x_1 < x_2 > x_3 < x_4 > \ldots$ (Например, при $n = 2$ есть только одна змея $1 < 2$, при $n = 3$ две: $1 < 3 > 2$ и $2 < 3 > 1$.) Пусть k_n — число змей длины n. **а)** Найдите рекуррентную формулу для вычисления k_n. **б)** Пусть $K(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} k_n\frac{x^n}{n!}$. Докажите, что $2K'(x) = 1 + K^2(x)$ и найдите $K(x)$, решив это уравнение.
в) Докажите, что ряд Тейлора тангенса есть $\operatorname{tg} x = 1\frac{x}{1!} + 2\frac{x^3}{3!} + 16\frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} k_{2n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

1	2 а	2 б	2 в	3	4 а	4 б	5 а	5 б	6	7 а	7 б	7 в	7 г	7 д	7 е	7 ж	7 з	7 и	7 к	8 а	8 б	9 а	9 б	9 в	10 а	10 б	10 в	11	12 а	12 б	13 а	13 б	13 в