

Тригонометрия

Уравнения

Решите уравнения:

Задача 1 (06.03).

а) $\sin\left(\frac{5\pi x}{4}\right) = x^2 - 4x + 5;$

б) $x^2 + 4x \cos(xy) + 4 = 0.$

в) $2 \operatorname{tg}^2 x - \frac{7}{\cos x} + 8 = 0;$

г) $(3 \cos x + 8 \sin x)^2 = 12 + 55 \sin^2 x;$

Задача 2. Решите уравнения:

а) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x;$

б) $\sin 3x + \sin 4x \sin 8x = 0$

Задача 3. Пусть α и β — острые углы, удовлетворяющие соотношениям

$$3 \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \beta = 1,$$

$$3 \sin 2\alpha - 2 \sin 2\beta = 0$$

Докажите, что $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}.$

Задача 4 (13.03).

а) $2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{3} \cos x;$

б) $\sin^3 x - \sin^2 \cos x + 3 \cos^3 x = 3 \sin x \cos^2 x;$

в) $\sin x \cos x - 6 \sin x + 6 \cos x + 6 = 0;$

г) $\sin^{100} x + \cos^{100} x = 1$

Задача 5. Рассмотрим функцию $f(x) = A \sin x + B \cos x$, где A и B — вещественные константы. Докажите, что если $f(x)$ обращается в ноль при двух различных значениях x_1, x_2 , таких что разность $x_1 - x_2 \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$, то $f(x)$ тождественно равна нулю.

Задача 6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$.

Задача 7 (16.03).

а) $\frac{26 \cos^2 x - 23 \cos x + 5}{13 \sin x - 12} = 0;$

б) $(2 \cos^2 x - \cos x) \sqrt{-11 \operatorname{tg} x} = 0;$

в) $3 \sin 2x + 2 \cos 2x = 3;$

г) $\sin 3x = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

Задача 8. Решите уравнения:

а) $\cos^3 x + \cos^2 x - 4 \cos^2 \frac{x}{2} = 0;$

б) $\operatorname{ctg} x - \sin x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}.$

Задача 9. Известно, что $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = 2$ и $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = 3$. Найдите $\operatorname{tg}(A + B)$.

Задача 10. Решите уравнение $\cos \frac{\pi x}{31} \cos \frac{2\pi x}{31} \cos \frac{4\pi x}{31} \cos \frac{8\pi x}{31} \cos \frac{16\pi x}{31} = \frac{1}{32}.$

Задача 11. Вычислите $\cos \frac{\pi}{15} \cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{3\pi}{15} \cos \frac{4\pi}{15} \cos \frac{5\pi}{15} \cos \frac{6\pi}{15} \cos \frac{7\pi}{15}.$

Задача 12 (30.03).

а) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2};$

б) $\cos 2x + 0,5 \leq \cos^2 x;$

в) $1 + \sqrt{3} + 2 \cos 2x - \sin 2x \geq (\sin x - \cos x)^2;$

г) $4 \sin 5x \cos 3x \leq 2 \sin 8x + \sqrt{3}$;

Задача 13. Даны периодичные функции $f(x)$ и $g(x)$. Можно ли утверждать, что функции $f(x) \pm g(x)$ периодичны, если: **а)** периоды функций $f(x)$ и $g(x)$ совпадают? **б)** периоды функций $f(x)$ и $g(x)$ различны?

Задача 14. Периодична ли функция $y = \cos \sqrt{x}$?

Задача 15. Найдите максимум функции $\sin x \sin y \sin z = \cos x \cos y \cos z$.

Задача 16 (03.04).

а) $2 \sin 7x \sin 2x + \cos 9x > 0, 2$;

б) $\sin 4x > \cos 4x$;

в) $|5 \sin x - 1| > 3 \sin x$;

г) $\sqrt{2} \operatorname{tg} 5x \cdot \cos 5x \leq 1$.