Задача 1. Даны два отрезка: AB и CD. Найдите множество точек, в которые может попасть середина отрезка, один конец которого P лежит на AB, а другой конец Q – на CD.

Определение 1. Пусть заданы две фигуры F и G (два множества точек на плоскости или в пространстве). Назовём *полусуммой* этих фигур множество всех середин отрезков, один конец которых принадлежит F, а другой – G. Обозначим это множество так: $F * G$.

Задача 2. Вычислите $F * G$ в случаях: **а)** F и G состоят из одной точки; **б)** F – отрезок, G – одна точка; **в)** F и G – прямоугольники с параллельными соответственными сторонами.

Задача 3. Докажите, что если F и G – выпуклые фигуры, то и $F * G$ выпукла.

Задача 4. Докажите, что количество сторон полусуммы n-угольника и m-угольника может быть любым числом от $\max(m, n)$ до $m + n$.

Задача 5. Вычислите $F * G$ в случаях: **а)** двух непараллельно расположенных прямоугольников; **б)** правильного треугольника и его стороны; **в)** двух окружностей разного радиуса; **г)** полуокружности с самой собой; **д)** полуокружностей, составляющих вместе окружность.

Задача 6. Найдите полусумму фигур в пространстве: **а)** двух параллельно расположенных прямоугольных параллелепипедов; **б)** отрезка и многоугольника, не лежащих в параллельных плоскостях; **в)** окружности и шара; **г)** двух противоположных граней правильного октаэдра; **д)** двух половинок шара, разрезанного диаметральной плоскостью; **е)** двух скрещивающихся прямых.

Определение 2. Зафиксируем некоторую точку O (начало отсчёта). Множество всех концов M векторов $OM = OP + OQ$, где P и Q – произвольные точки фигур F и G, называется *суммой* (или *суммой Минковского)* фигур F и G. Сумма F и G обозначается $F + G$.

Определение 3. Множество всех концов M векторов $OM = \lambda OP$, где P – любая точка фигуры F, а λ – данное положительное число, называют *произведением* F на λ и обозначают λF.

Задача 7. Как выразить $F * G$ через операции суммы и произведения?

Задача 8. Докажите следующие свойства введённых операций:

- $F + G = G + F$;
- $(F + G) + H = F + (G + H)$;
- $\lambda(\mu F) = (\lambda\mu)F$;
- $\lambda(F + G) = \lambda F + \lambda G$;
- Если $F \subset G$, $F' \subset G'$, то $\lambda F + \mu G \subset \lambda F' + \mu G'$;
- $\lambda F + \mu F \supset (\lambda + \mu)F$, если F выпукло, то имеет место равенство;
- $\lambda(F \cup G) = \lambda F \cup \lambda G$, $H + (F \cup G) = (H + F) \cup (H + G)$;
- $\lambda(F \cap G) = \lambda F \cap \lambda G$, $H + (F \cap G) \subset (H + F) \cap (H + G)$.

Значит ли это, что множество выпуклых фигур образует векторное пространство относительно операций суммы и произведения?

Задача 9. Докажите, что если F и G – выпуклые многоугольники, а $p()$ обозначает периметр, то $p(\lambda F + \mu G) = \lambda p(F) + \mu p(G)$.

Задача 10. Докажите, что если $\lambda + \mu = 1$, то множество $\lambda F + \mu G$ не зависит от выбора точки O.

Задача 11. Из точки O, лежащей на границе полуплоскости, внутрь полуплоскости направлено n векторов длины 1. Докажите, что если n нечётно, то длина их суммы не меньше 1.

Задача 12. Пусть F – выпуклый многоугольник площади S и периметра p, и пусть K – круг радиуса 1 с центром в O. Докажите, что площадь фигуры $F + tK$ равна $S + tp + t^2\pi$.

Задача 13. Докажите, что следующие свойства выпуклого многоугольника F эквивалентны:

- F имеет центр симметрии;
- F можно разрезать на параллелограммы;
- F есть сумма нескольких отрезков.

Задача 14. **а)** Докажите, что следующие свойства выпуклого многогранника F эквивалентны:

- Все грани F – параллелограммы;
- F есть сумма конечного набора отрезков, никакие три из которых не параллельны одной плоскости.

б) Сколько граней может иметь такой многогранник, если число отрезков (во втором свойстве) равно k?

Задача 15. От незагашенного окурка в одной точке загорелся лес. Ветер дул в течение времени t_1 со скоростью v_1, затем t_2 – со скоростью v_2, $\ldots$, t_n – со скоростью v_n. Пожар распространяется от загоревшихся участков со скоростью ветра (причём эти участки продолжают гореть).
а) Какой участок выгорел за это время?
б) А если пожар, кроме того, распространяется равномерно по всем направлениями со скоростью u?

Задача 16. (*Теорема Брунна-Минковского*) Для любых выпуклых фигур F и G и для любых положительных чисел λ, μ выполнено неравенство

$$S(\lambda F + \mu G) \geqslant (\lambda\sqrt{S(F)} + \mu\sqrt{S(G)})^2.$$

Докажите эту теорему:
а) для прямоугольников с попарно параллельными сторонами;
б) для любых многоугольников площади 1 при условии $\lambda + \mu = 1$;
в) Для многоугольников любой площади и любых λ, μ.
г) Для случая, когда одна из фигур является многоугольником, а другая – кругом.

Задача 17. Докажите *изопериметрическое неравенство*: для любой выпуклой фигуры площади S и периметра p выполнено неравенство $S \leqslant \frac{p^2}{4\pi}$.

Задача 18. Пусть F и G – многоугольники.
а) Докажите формулу

$$S(\lambda F + \mu G) = \lambda^2 S(F) + 2\lambda\mu S(F, G) + \mu^2 S(G),$$

где число $S(F, G)$ не зависит от λ и μ. Его называют *смешанной площадью* многоугольников F и G. **б)** Докажите неравенство $S(F, G)^2 \geqslant S(F)S(G)$. В каком случае имеет место равенство?

1	2 а	2 б	2 в	3	4	5 а	5 б	5 в	5 г	5 д	6 а	6 б	6 в	6 г	6 д	6 е	7	8	9	10	11	12	13	14 а	14 б	15 а	15 б	16 а	16 б	16 в	16 г	17	18 а	18 б