Листок №60 Производная. Определение и приёмы вычисления 01.02 – 15.02.2021 31/25/19 з. на 5/4/3

Определение производной.

Определение 1. Пусть функция f определена на некотором интервале, точка x_0 принадлежит этому интервалу. *Производной функции f в точке x_0* называется число $f'(x_0) := \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, если этот предел существует (тогда говорят, что функция f *дифференцируема* в точке x_0).

Задача 1. Докажите, что $f'(x_0)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$.

Задача 2. Для каждого $a\in\mathbb{R}$ найдите $f'(a)$, если
а) $f(x)=c$, где $c\in\mathbb{R}$; **б)** $f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}$; **в)** $f(x)=x^{-n}, n\in\mathbb{N}$.

Задача 3. Докажите, что $f'(x_0)=A$ тогда и только тогда, когда найдётся такая функция $\beta(t)$, что для всех достаточно малых t будет верно $f(x_0+t)=f(x_0)+At+\beta(t)$, причём $\lim\limits_{t\to 0}\beta(t)/t=0$.

Задача 4. Докажите, что функция, дифференцируемая в точке, непрерывна в этой точке.

Определение 2. Говорят, что функция f *дифференцируема* на интервале, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала. При этом её *производной* называется функция $f' : x\mapsto f'(x)$.

Задача 5. Найдите производные функций (там, где они существуют): **а)** $|x|$; **б)** $\sqrt{x}$; **в)** $x^{3/2}$.

Вычисление производных

Задача 6°. Пусть функции f и g дифференцируемы на некотором интервале. Докажите, что
а) функция $f+g$ тоже дифференцируема на этом интервале и $(f+g)'=f'+g'$;
б) для любой константы C функция Cf тоже дифференцируема на этом интервале и $(Cf)'=Cf'$;
в) функция fg тоже дифференцируема на этом интервале и $(fg)'=f'g+fg'$;
г) функция f/g дифференцируема во всех точках интервала, где $g(x)\neq 0$, и $(f/g)'=(f'g-fg')/g^2$.

Задача 7. Найдите производные функций (там, где они существуют): **а)** $a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$; **б)** $\frac{5x+6}{7x+8}$; **в)** $\frac{1}{x^3-5x-2}$. **г)** $\sin x$; **д)** $\cos x$; **е)** $\operatorname{tg} x$; **ж)** $\operatorname{ctg} x$; **з)** $x^{m/n}$, где $m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}$; **и)** e^x.

Задача 8°. Пусть $F(x)=f(g(x))$. Докажите, что если g дифференцируема в точке x_0, а f дифференцируема в точке $g(x_0)$, то $F(x)$ дифференцируема в точке x_0, и $F'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0)$.

Задача 9°. **а)*** Пусть функция f на некотором интервале непрерывна и имеет обратную функцию g. Докажите, что если f дифференцируема в точке x_0 из этого интервала и $f'(x_0)\neq 0$, то g дифференцируема в точке $f(x_0)$ и $g'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}$.
б) Каков геометрический смысл формулы из пункта а)?

Задача 10. Найдите производную функции $\sqrt[3]{x}$ через формулу производной обратной функции.

Задача 11. Продифференцируйте:
а) $\sin x^2$; **б)** $\arcsin x$; **в)** $\arccos x$; **г)** $\operatorname{arctg} x$; **д)** $\ln x$; **е)** 2^x; **ж)*** x^α.

Определение 3. Говорят, что многочлен $f(x)$ имеет *кратный корень α,* если он делится на $(x-\alpha)^k$, где целое $k\geqslant 2$. Если при этом $f(x)$ не делится на $(x-\alpha)^{k+1}$, говорят, что α — *корень кратности k*.

Задача 12°.
а) Докажите, что при дифференцировании кратность корня многочлена понижается на 1.
б) Докажите, что многочлен имеет кратный корень тогда и только тогда, когда он имеет общий корень со своей производной.
в) Пусть многочлен из $\mathbb{Q}[x]$ не раскладывается на множители с рациональными коэффициентами (неприводим над $\mathbb{Q}$). Может ли он иметь кратный комплексный корень?

1	2 а	2 б	2 в	3	4	5 а	5 б	5 в	6 а	6 б	6 в	6 г	7 а	7 б	7 в	7 г	7 д	7 е	7 ж	7 з	7 и	8	9 а	9 б	10	11 а	11 б	11 в	11 г	11 д	11 е	11 ж	12 а	12 б	12 в