Листок №59 | Предел функции | 18.01.2021 – 29.01.2021
35/27/21 з. на 5/4/3

Предел функции

Определение 1. (Предел функции по Гейне) Пусть функция f определена в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ точки a кроме, быть может, самой точки a. Число b называется пределом f в точке a, если для каждой сходящейся к a последовательности (x_n), элементы которой отличны от a и принадлежат $\mathcal{U}$, верно равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.
Обозначения: $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$ («$f(x)$ стремится к b при x, стремящемся к a»).

Задача 1. **а)** Зависит ли определение 1 от выбора окрестности $\mathcal{U}$? **б)** Влияет ли значение f в точке a на существование предела f в a и его значение? **в)** Может ли функция иметь два предела в точке?

Задача 2✎. Дайте определение того, что функция f не имеет предела в точке a.

Определение 2. (Предел функции по Коши.) Пусть функция f определена в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ точки a кроме, быть может, самой точки a. Число b называется пределом f в точке a, если для любой окрестности $\mathcal{V}$ точки b найдется такая окрестность $\mathcal{W}$ точки a, что при всех $x \neq a$ из $\mathcal{W}$ число $f(x)$ лежит в $\mathcal{V}$.

Задача 3. Докажите эквивалентность определений 1 и 2.

Задача 4✎. Найдите следующие пределы (если они существуют):
а) $\lim\limits_{x\to1}\{x\}$; **б)** $\lim\limits_{x\to1}[x]$; **в)** $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-6x^2+9x}{x-3}$; **г)** $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+4x+1}{x^2+2x+1}$; **д)** $\lim\limits_{x\to0} x\sin\frac{1}{x}$; **е)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

Задача 5✎. Дайте определение **а)** предела функции при $x \to +\infty$;
б) того, что $f(x)$ стремится к $+\infty$, при $x \to a$ (где $a \in \mathbb{R}$ или $a = +\infty$).

Задача 6. Найдите пределы (если они существуют) при $x \to +\infty$ функций из задачи 4, а)–г).

Задача 7✎. Сформулируйте и докажите **а)** теоремы о пределе суммы, разности, произведения и отношения двух функций; **б)** «принцип двух милиционеров» для функций

Задача 8. Найдите пределы при $x \to \pm\infty$ функции $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x), Q(x)$ — многочлены.

Задача 9. **а)** Пусть функции f и g определены на $\mathbb{R}$, причём $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to A} g(x) = B$. Обязательно ли тогда $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = B$? **б)** А если $g(A) = B$?

Задача 10. Докажите неравенства: **а)** $\sin x < x$ при $x > 0$; **б)** $x < \mathrm{tg} x$ при $0 < x < \pi/2$.

Задача 11✎. (*Первый «замечательный» предел*) Докажите, что $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Задача 12✎. Найдите: **а)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$; **г)** $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$; **д)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_2 x}{x}$.

Задача 13✎. Найдите: **а)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ $(n \in \mathbb{N})$; **в)** $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ $(m, n \in \mathbb{N})$.

Задача 14. Докажите, что: **а)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$; **б)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$;

Задача 15✎. (*Второй «замечательный» предел*) Докажите, что $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{1/x} = e$.

Задача 16✎. Определите предел слева $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и предел справа $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ функции f в точке a.

Задача 17. Приведите пример функции, которая в точке a **а)** имеет разные пределы слева и справа; **б)** имеет предел слева, но не имеет предела справа; **в)** не имеет предела ни справа, ни слева.

Задача 18. Докажите, что функция, монотонная на некотором интервале, имеет предел как слева, так и справа в каждой точке этого интервала.

Задача 19. Докажите, что монотонная функция, определённая на отрезке,
а) непрерывна хотя бы в одной его точке (может, в конце — тогда непрерывна «слева» или «справа»);
б)* непрерывна во всех его точках, за исключением не более чем счётного числа точек.

Задача 20*. Приведите пример функции, определенной на $\mathbb{R}$, не равной тождественно нулю ни на каком интервале, но имеющей в каждой точке нулевой предел.

Задача 21*. Может ли функция, определенная на $\mathbb{R}$, иметь в каждой точке бесконечный предел?

1а	1б	1в	2	3	4а	4б	4в	4г	4д	4е	5а	5б	6	7а	7б	8	9а	9б	10а	10б	11	12а	12б	12в	12г	12д	13а	13б	13в	14а	14б	15	16	17а	17б	17в	18	19а	19б	20	21