Листок №56 **Линейные преобразования плоскости** 09.11.2020 – 27.11.2020
30/24/18 з. на 5/4/3

Рассмотрим двумерное линейное пространство над $\mathbb{R}$. Отождествляя векторы (рассматриваемые как радиус-вектор из начала координат) с точками на плоскости, можно считать, что векторы — это точки из $\mathbb{R}^2$.

Точку с декартовыми координатами x и y будем обозначать через $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Определение 1. *Линейным отображением* плоскости в себя называется отображение вида

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}.$$

Таблица вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ называется *матрицей* этого отображения.

Задача 1. Докажите, что тождественное отображение имеет матрицу $E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Найдите образы точек $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, а также образ единичного квадрата при отображении с матрицей
а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; **д)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; **е)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; **ж)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Найдите все матрицы линейных преобразований, переводящих
а) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;
б) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;
в) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

Задача 4. Докажите, что линейное отображение
а) однозначно задается образами векторов любого базиса;
б) оставляет начало координат на месте;
в) переводит прямые в прямые;
г) сохраняет параллельность прямых.

Задача 5. Докажите, что отображение $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ является линейным тогда и только тогда, когда оно обладает следующими тремя свойствами

- $A(\vec{0}) = \vec{0}$;
- для любых $u, v \in \mathbb{R}^2$ выполнено $A(u+v) = A(u) + A(v)$;
- для любого $v \in \mathbb{R}^2$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено: $A(\lambda v) = \lambda A(v)$.

Определение 2. *Образом* линейного отображения $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ называется множество $\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(a) : a \in \mathbb{R}^2\}$, а *ядром* — множество $\operatorname{Ker}\varphi = \{a \in \mathbb{R}^2 : \varphi(a) = \vec{0}\}$.

Задача 6. **а)** Докажите, что и ядро, и образ — это либо $\vec{0}$, либо проходящая через начало координат прямая, либо вся плоскость. **б)** Приведите соответствующие примеры.

Задача 7. Докажите, что $\dim\operatorname{Ker}\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim V$.

Задача 8. Докажите, что линейное отображение сохраняет отношение отрезков, лежащих на одной прямой (если не переводит всю эту прямую в $\vec{0}$).

Задача 9. Пусть три чевианы делят три стороны треугольника в отношениях α_1, α_2 и α_3. Докажите, что то, пересекаются ли они в одной точке, зависит только от чисел α_i (а от треугольника не зависит).

Задача 10*. Как при линейном отображении с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ изменяется площадь

а) единичного квадрата;
б) произвольного параллелограмма;
в) произвольного многоугольника?
г) Докажите, что отображение с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ биективно тогда и только тогда, когда $ad - bc \neq 0$.

Определение 3. *Полярными координатами* точки плоскости называются ее расстояние до начала координат и азимут (отсчитываемый против часовой стрелки угол радиус-вектора с осью x).

Задача 11. Докажите, что точка с полярными координатами (r, φ) имеет декартовы координаты $\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$.

Задача 12. Найдите **а)** матрицу поворота на $90°$; **б)** матрицу $R(\varphi)$ поворота на угол φ.

Задача 13. **а)** Докажите, что линейное преобразование сохраняет углы тогда и только тогда, когда его матрица имеет вид либо $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, либо $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. (Что это за преобразования геометрически?) **б)** Какие линейные преобразования сохраняют расстояния?

Определение 4. *Произведением* матриц, соответствующих линейным отображениям A и B, называется матрица, соответствующая композиции $A \circ B$ этих отображений. Она обозначается AB.

Задача 14. **а)** Вычислите произведение матриц $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
б) Вычислите произведение $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.
в) Коммутативно ли умножение матриц?

Задача 15*. Решите уравнения **а)** $A^2 = E$; **б)** $A^2 = -E$; **в)** $A^2 = A$.

Задача 16. Вычислите явно произведение $R(\varphi)R(\psi)$. Какие тригонометрические тождества даёт равенство $R(\varphi)R(\psi) = R(\varphi + \psi)$?

1	2 а	2 б	2 в	2 г	2 д	2 е	2 ж	3 а	3 б	3 в	4 а	4 б	4 в	4 г	5	6 а	6 б	7	8	9	10 а	10 б	10 в	10 г	11	12 а	12 б	13 а	13 б	14 а	14 б	14 в	15 а	15 б	15 в	16