Листок №54 Векторные пространства, базис, размерность 02.10.2020 – 23.10.2020
30/23/16 з. на 5/4/3

Пусть K — любое поле (можно считать, что это любое поле из $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$).

Определение 1. *Векторным* или *линейным пространством* над полем K называется любое множество V, элементы которого (векторы) можно складывать друг с другом и умножать на элементы поля так, что снова получаются векторы из этого пространства, причём выполнены следующие аксиомы:

1. $u + v = v + u$ для любых $u, v \in V$;
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$ для любых $u, v, w \in V$;
3. существует *нулевой* вектор 0 такой, что $u + 0 = u$ для любого $u \in V$;
4. для любого $v \in V$ существует *противоположный* вектор $-v$ такой, что $v + (-v) = 0$;
5. $1v = v$ для любого $v \in V$;
6. $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ для любых $\lambda, \mu \in K$ и $v \in V$;
7. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ для любых $\lambda, \mu \in K$ и $v \in V$;
8. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ для любых $\lambda \in K$ и $u, v \in V$.

Задача 1. Являются ли линейными пространствами **а)** $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$; **б)** $\mathbb{Q}$ над $\mathbb{R}$;
в) множество всех векторов на плоскости над $\mathbb{R}$;
г) многочлены с коэффициентами из поля K (обозначение: $K[x]$) над K;
д) многочлены степени не выше n над $\mathbb{R}$; ровно степени n и нулевой многочлен, над $\mathbb{R}$;
е) многочлены над $\mathbb{R}$, равные в точке $x = 1$ нулю; единице;
ж) строки (или столбцы) из n элементов поля K (обозначение: K^n);
з) бесконечные последовательности действительных чисел;
и) сходящиеся последовательности действительных чисел;
к) последовательности Фибоначчи (последовательности, удовлетворяющие условию $x_{n+1} = x_{n-1} + x_n$);
л) множество решений однородной системы линейных уравнений; неоднородной;
м) поле характеристики p над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Задача 2. Докажите, что элементы 0 и $-v$ в третьей и четвертой аксиомах определены однозначно.

Определение 2. Вектор $b \in V$ *линейно выражается* через векторы $a_1, \ldots, a_m \in V$, если существуют такие $\mu_1, \ldots, \mu_m \in K$, что $b = \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_m a_m$. (Вектор 0 линейно выражается через пустую систему векторов.)

Определение 3. Система векторов $(a_1, \ldots, a_m)$ называется *линейно зависимой*, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:
1) существуют такие $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, не все равные нулю, что $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m = 0$;
2) хотя бы один из векторов $a_1, \ldots, a_m$ линейно выражается через остальные.
Пустая система векторов считается линейно независимой.

Задача 3. Являются ли линейно независимыми векторы следующих множеств:
а) $\{(1, -1, 0), (-1, 0, 1), (0, 1, -1)\} \subset \mathbb{R}^3$; **б)** $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$?

Задача 4. Если система векторов $\{a_1, \ldots, a_m\}$ линейно независима, а система векторов $\{a_1, \ldots, a_m, b\}$ линейно зависима, то вектор b линейно выражается через векторы $a_1, \ldots, a_m$.

Задача 5. В задаче 18,*в* предыдущего листка выберем из весов коров минимальное количество так, чтобы любой оставшийся вес линейно выражался над $\mathbb{Q}$ через выбранные. Докажите, что все равенства из условия задачи будут тогда выполняться покомпонентно (отдельно для коэффициентов при первом выбранном весе, отдельно — при втором, ...) и получите ещё одно решение задачи про коров.

Определение 4. Векторное пространство V называется *бесконечномерным*, если в нем существуют линейно независимые системы из сколь угодно большого числа векторов. В противном случае пространство V называется *конечномерным.*

Задача 6. Приведите примеры конечномерных и бесконечномерных векторных пространств.

Определение 5. *Базисом* (конечномерного) векторного пространства V называется всякая линейно независимая система векторов, через которую выражаются все векторы пространства V.

Задача 7. Докажите, что если $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис пространства V, то всякий вектор $x \in V$ однозначно выражается через $e_1, \dots, e_n$. Коэффициенты этого выражения называются *координатами* вектора x в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Определение 6. Всякая система векторов (не обязательно линейно независимая), через которую линейно выражаются все векторы пространства V, называется *порождающей.*

Задача 8✎. Докажите, что в конечномерном векторном пространстве
а) всякая линейно независимая система векторов может быть дополнена до базиса (в частности, существует хотя бы один базис);
б) из всякой порождающей системы векторов можно выбрать базис.

Задача 9✎. Докажите, что все базисы конечномерного векторного пространства V содержат одно и то же число векторов.

Определение 7. Число векторов в базисе конечномерного пространства V называется *размерностью* пространства V и обозначается $\dim V$.

Задача 10. Пусть n — размерность конечного поля F характеристики p как векторного пространства над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Сколько элементов в F?

Задача 11. **а)** На табло расположены лампочки. Есть несколько кнопок. Каждая кнопка меняет состояние соединенных с ней лампочек. Докажите, что число узоров, которые можно получить, нажимая на кнопки, есть степень двойки. **б)*** Пусть для любого набора лампочек существует кнопка, соединенная с нечётным числом из них. Докажите, что все лампочки можно погасить. **в)** Пусть лампочки образуют квадрат 4×4 и рядом с каждой лампочкой есть кнопка, соединенная со всеми лампочками в том же столбце и в той же строке. Как изменить состояние ровно одной лампочки?

Задача 12. **а)** Докажите, что в дереве нет непустых подграфов, у которых степень каждой вершины четна. **б)** Пусть a — число подграфов данного графа, у которых степень каждой вершины четна. Докажите, что число a — степень двойки. **в)** На ребрах дерева стоят знаки $+$ и $-$. Разрешается менять знак на всех ребрах, выходящих из одной вершины. Докажите, что из любого узора можно получить любой другой. **г)** Пусть b — наибольшее количество узоров на данном графе, ни один из которых нельзя получить из другого операциями, описанными в предыдущем пункте. Докажите, что число b — степень двойки. **д)*** Докажите, что для любого графа $a = b$.

Задача 13. **а)** Докажите, что через любые четыре точки плоскости проходит бесконечное количество кривых второго порядка (линий, заданных уравнениями вида $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, где не все a, b, c равны нулю). **б)** Докажите, что через любые пять точек плоскости проходит хотя бы одна кривая второго порядка. **в)** Существуют такие пять точек, через которые проходит ровно одна кривая второго порядка; бесконечное количество кривых второго порядка.

1 а	1 б	1 в	1 г	1 д	1 е	1 ж	1 з	1 и	1 к	1 л	1 м	2	3 а	3 б	4	5	6	7	8 а	8 б	9	10	11 а	11 б	11 в	12 а	12 б	12 в	12 г	12 д	13 а	13 б	13 в