Повторение

Многочлены

Задача 1. Числа 1 и -2 являются корнями многочлена $P(x)$, свободный член которого равен 3. Найдите остаток от деления $P(x)$ на $x^3 + x^2 - 2x$.

Задача 2. Решите уравнения:
а) $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{3998} + x^{4000} = 2001x^{2000}$.
б) $(x-2)(x-3)(x-4) = 6$
в) $x^3 + (m-1)x + m = 0$, где m –любое действительное число.

Задача 3. Найдите число корней уравнения $x^{37} + x^8 + 1 = 0$.

Задача 4. Представьте многочлен $x^7 + x^5 + 1$ в виде произведения двух многочленов.

Задача 5. Решите в целых числах уравнение $m^3 + m^2 + m + 1 = 3^n$.

Задача 6. Постройте многочлен, корни которого равны квадратам корней многочлена $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$.

Задача 7. Про коэффициенты a, b, c и d двух квадратных трёхчленов $x^2 + bx + c$ и $x^2 + ax + d$ известно, что $0 < a < b < c < d$. Могут ли эти трёхчлены иметь общий корень?

Задача 8. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней и $a + b + c > 0$. Найдите знак коэффициента c.

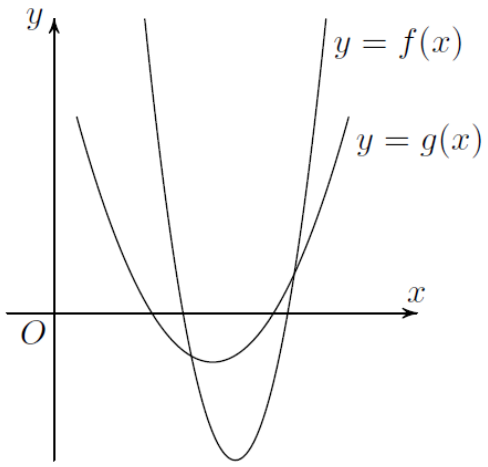
Повторение

Многочлены 2

Задача 1. Решите уравнение $6x^4 + 5x^3 - 38^x 2 + 5x + 6 = 0$

Задача 2. Решите уравнение $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 10x + 4 = 0$

Задача 3. Даны графики двух квадратичных функций: $f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ имеющие одинаковые направления «ветвей». Абсциссы их точек пересечения положительны, оси симметрии могут не совпадать (см. рисунок). Сравните соответствующие коэффициенты трехчленов.



Задача 4. Изобразите на координатной плоскости множество решений уравнения $y^2 - |y| = x^2 - |x|$.

Задача 5. Пусть $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $g(x) = 3x^2 - 1$. Постройте графики $f(g(x))$ и $g(f(x))$.

Задача 6. $(2x + 3)(2x + 5)(2x + 7)(2x + 9) = 384$

Задача 7. $x^4 + 6x^3 - 23x^2 + 12x + 4 = 0$

Задача 8*. Изобразите множество точек на координатной плоскости, для координат x, y которых выражение $\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ принимает наибольшее значение.

Повторение

Неравенства

Задача 1. Решите неравенство $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 \leqslant 0$.

Задача 2. Докажите неравенство для любых действительных x, y:
$4x^2 - 4xy + y^2 - 12x + 6y + 10 > 0$

Задача 3. Докажите неравенство для любых положительных a, b: $\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Задача 4. Докажите, что для любых неотрицательных a, b выполняется неравенство
$\dfrac{a^3 + b^3}{2} \geqslant \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$.

Задача 5. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $y(x^2 - 9) \geqslant x - 3$.

Задача 6. Решите неравенство $2x > \dfrac{5x+3}{|x+2|}$.

Задача 7. Докажите, что для любых неотрицательных a, b, c выполняется неравенство
$ab + bc + ac \geqslant a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$

Задача 8. Докажите, что если $a > 0$ и $b > 0$, то из неравенства $ab > a + b$ следует неравенство $a + b > 4$.

Задача 9. Докажите, что если $a > 0$ и $b > 0$, то $\dfrac{(a+1)^2}{b} + \dfrac{(b+1)^2}{a} \geqslant 8$.

Задача 10. Известно, что x, y и z — положительные числа, произведение которых равно $0,5$. Докажите, что $\dfrac{xy^2}{x^3+1} + \dfrac{yz^2}{y^3+1} + \dfrac{zx^2}{z^3+1} \geqslant 1$

Задача 11 *(Указание: подумайте, к каким числам можно применить неравенство о средних).* Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 2$ имеют место неравенства:
$n(\sqrt[n]{n+1} - 1) < 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} < n\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}\right) + 1$.

Домашнее задание

Задача 12. Докажите неравенство для всех положительных a: $a^{10} + \dfrac{3}{a^2} + \dfrac{4}{a} \geqslant 8$

Задача 13. Решите неравенства:
а) $\dfrac{(2x-3)(7-x)^2(x-x^2)^3}{5(5-3x)^3}$; **б)** $72x^5 - 180x^4 + 46x^3 + 101x^2 - 6x - 9 < 0$.

Задача 14. Докажите, что числа a, b, c удовлетворяют неравенству треугольника, если и только если:
а) $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b+c) > 0$; **б)** $(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4)$.

Повторение

Иррациональные выражения

Задача 1. Равносильны ли уравнения:

а) $\sqrt{x-5}=9$ и $x-5=81$;
б) $\sqrt[3]{2-x}=-3$ и $2-x=-27$;
в) $\sqrt[4]{2-x}=-3$ и $2-x=81$;
г) $\sqrt[5]{-x^3-1}=-1$ и $x^3+1=1$?

Решите уравнения:

Задача 2.

а) $x^2+\sqrt{x^2-x+9}=x+3$.
б) $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x+7}=3$
в) $5\sqrt{x-3}+2\sqrt{x}+3x=21$.
г) $\dfrac{\sqrt{x^2-5x+8}}{3-x}\geqslant 1$.

Задача 3. **а)** $1+\sqrt{2-x}=x^3-\dfrac{1}{x-2}$;
б) $x^2+2\sqrt{x^2-3x+11}=3x+4$.

Задача 4. $\begin{cases}4x+5y=\sqrt{16x^2-25y^2}\\ x^2+6x=7\end{cases}$

Задача 5.

а) $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}=5$;
б) $\sqrt[m]{(1+x)^2}-\sqrt[m]{(1-x)^2}=\sqrt[m]{1-x^2}$;
в) $3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}=\dfrac{120}{x}$
г) $x+\sqrt{3+\sqrt{x}}=3$
д) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$
е) $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}=p$, где p — произвольное вещественное число.

Задача 6. В зависимости от значений параметра b определите количество корней уравнения: $\sqrt{3x-5}=b-\sqrt{3x+11}$.

Задача 7. При всех значениях параметра решите уравнение $\sqrt{a-|x|}+\sqrt{x^2-a^2}=-a$

Задача 8. Изобразите множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $\sqrt{(x+3)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=5$.