Системы линейных уравнений

Пусть K — любое поле (можно считать, что это любое из полей $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$).

Определение 1. *Линейное уравнение* с переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем K — это уравнение вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = b$, где *коэффициенты* $a_1, a_2, \ldots a_n$ и *свободный член* b лежат в K.

Система m линейных уравнений с n переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем K в общем виде выглядит так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Говорят, что это система с прямоугольной матрицей $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ и правой частью $b = (b_i)$; коротко система записывается так: $Ax = b$. Решение системы — это такой упорядоченный набор $(x_1, \ldots, x_n)$ элементов поля K, что выполнены все уравнения системы.

Определение 2. *Элементарные преобразования* системы линейных уравнений — это
- умножение строки на ненулевое число (ненулевой элемент поля);
- прибавление к строке другой строки, умноженной на число (меняется только одна строка!);
- перемена двух строк местами.

Задача 1. Докажите, что элементарные преобразования не меняют множество решений системы (то есть, получается система, *эквивалентная* исходной).

Задача 2. (*Метод Гаусса*) Докажите, что для любой системы уравнений найдется эквивалентная ей система $Cx = d$, где матрица C имеет ступенчатый вид: в каждой ненулевой строке начальный отрезок нулей длинней, чем в предшествующей строке, а все нулевые строки располагаются в конце.

Задача 3. Как описать все решения системы, приведённой к ступенчатому виду?[1]

Задача 4✎. Решите системы (над $\mathbb{R}$):

а) $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x + 7y + 3z = 2 \\ -x - 3y = 3 \\ 3x + 10y + 5z = 7 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + 5y + 6z = 15 \\ 7x + 8y + 9z = 24 \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \ldots \\ x_{100} + x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ x + by + b^2z = 0 \\ x + cy + c^2z = 0 \end{cases}$

Задача 5. Может ли система линейных уравнений с действительными коэффициентами иметь в точности два различных решения?

Задача 6✎. Сколько решений в действительных числах может иметь система из m линейных уравнений от n переменных, если **а)** $m = n$; **б)** $m < n$; **в)** $m > n$?

Определение 3. Система из определения 1 называется *однородной,* если $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.

Задача 7. Докажите, что если умножить любое решение однородной системы на число или сложить любые два её решения, снова получится её решение (кстати, а что такое «сумма решений»?).

Задача 8✎. Пусть X_O — множество решений однородной системы $Ax = 0$. Докажите, что множество решений неоднородной системы $Ax = b$ (с той же левой частью) либо пусто, либо это множество $\{x_{\text{частн}} + x_o \mid x_o \in X_O\}$, где $x_{\text{частн}}$ — произвольно выбранное решение неоднородной системы.

Задача 9. Докажите, что однородная система, в которой неизвестных больше, чем уравнений, имеет ненулевое решение.

---

[1] *Начало решения.* Посмотрим на последнюю ненулевую строку. Если она имеет вид $\alpha = 0$, где α — ненулевое число, система не имеет решений. Если она имеет вид $\alpha x_i = \beta$, где $\alpha \neq 0$, мы можем однозначно выразить x_i и подставить его в предыдущие уравнения, уменьшив число неизвестных. Если она имеет вид $\alpha x_i + \beta x_j = b$ с ненулевыми α, β, мы можем придавать, например, переменной x_j любое значение (x_j при этом называют *свободной переменной),* находить по нему значение x_i и подставлять эти значения в предыдущие уравнения...

Задача 10. Пусть некоторая однородная система из n линейных уравнений от n переменных имеет только нулевое решение. Докажите, что у любой неоднородной системы линейных уравнений с такой же левой частью решений будет **а)** не больше одного; **б)** ровно одно.

Задача 11. Докажите, что если матрица A такова, что для любой правой части b соответствующая система $Ax = b$ имеет единственное решение, то $n = m$ (то есть матрица квадратная).

Задача 12. Старуха Шапокляк расставила числа в граничных клетках прямоугольной таблицы («в рамочке»). Сможет ли Чебурашка поставить числа в оставшиеся («внутренние») клетки таблицы так, что каждое поставленное число будет средним арифметическим четырёх его соседей?

Задача 13. 24 студента решали 25 задач. У преподавателя есть таблица размером 24×25, в которой записано, кто какие задачи решил. Оказалось, что каждую задачу решил хотя бы один студент. Докажите, что можно отметить некоторые задачи «галочкой» так, что каждый из студентов решил чётное число (в частности, может быть, ноль) отмеченных задач.

***

Задача 14. Пусть все коэффициенты системы линейных уравнений рациональны (включая правую часть), и система имеет действительное решение. Докажите, что она имеет и рациональное решение.

Задача 15. Известно, что некоторый многочлен принимает во всех рациональных точках рациональные значения. Докажите, что его коэффициенты рациональны.

Задача 16. Внутри отрезка $[0, 1]$ выбрали n различных точек. Отмеченной точкой назовём одну из n выбранных или конец отрезка. Оказалось, что любая из внутренних n точек является серединой какого-то отрезка с вершинами в отмеченных. Докажите, что все точки рациональные.

Задача 17. Пусть коэффициенты матрицы A рациональны и система $Ax = b$ разрешима. Докажите, что у нее есть решение вида $x^{(0)} = Cb$, где C — матрица с рациональными коэффициентами (то есть, каждое из $x_i^{(0)}$ — *линейная комбинация* чисел $b_1, \ldots, b_m$ с рациональными коэффициентами).

Задача 18. В стаде 101 корова. Любые 100 из них можно разбить на 2 стада по 50 коров так, что общие веса этих двух стад будут равны. Требуется доказать, что все коровы одного веса.
а) Решите задачу, если веса коров — целые числа; рациональные числа.
б) Докажите, что у системы с переменными — весами коров, — построенной по условию задачи, бесконечно много решений, но при записи её решений получится ровно одна свободная переменная.
в) Решите задачу, если веса коров — действительные числа.

Задача 19. Пусть квадрат 1×1 разбит произвольным образом на n квадратов.
а) Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — переменные, соответствующие сторонам квадратов. Проведём через стороны квадратов прямые, так что прямоугольник разобьётся на прямоугольную сеточку. Введите дополнительные переменные — длины сторон прямоугольничков этой сеточки, — и составьте такую систему линейных уравнений, коэффициенты которой — только нули и плюс-минус единицы, а в правой части — только нули или единицы, что любое решение этой системы, состоящее из положительных чисел, даёт разбиение исходного квадрата 1×1 на n квадратов.
б) Докажите, что для любого решения нашей системы выполнено равенство $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$.
в) Докажите, что если при решении нашей системы появится хоть одна свободная переменная t, то некоторая квадратичная функция от t будет постоянной на некотором интервале.
г) Докажите, что стороны всех квадратов рациональны.

Задача 20*. Пусть прямоугольник $a \times b$ разбит произвольным образом на n квадратов.
а) Докажите, что система, составленная аналогично тому, как это было сделано в предыдущей задаче, имеет единственное решение, и оно состоит из чисел вида $\lambda a + \mu b$ с рациональными λ и μ.
б) Подставим это решение в каждое уравнение нашей системы, заодно преобразуя уравнение к виду $\lambda a + \mu b = 0$. Докажите, что не может для каждого уравнения системы получиться $\lambda = \mu = 0$.
в) Докажите, что число a/b рационально, а стороны всех квадратов соизмеримы как с a, так и с b.

1	2	3	4 а	4 б	4 в	4 г	5	6 а	6 б	6 в	7	8	9	10 а	10 б	11	12	13	14	15	16	17	18 а	18 б	18 в	19 а	19 б	19 в	19 г	20 а	20 б	20 в