Листок №47 — Перестановки. Часть 1. — 06.04.2020 – 15.04.2020
24/19/14 з. на 5/4/3

Определение 1. *Перестановка* чисел $1, \dots, n$ — это взаимно однозначное отображение множества $\{1, \dots, n\}$ на себя. Множество перестановок чисел $1, \dots, n$ обозначается S_n и называется *симметрической группой*.

Задача 1. Сколько элементов в симметрической группе S_n?

Перестановки записывают таблицами вида $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; такая таблица означает перестановку $1 \mapsto 2$ (то есть 1 переходит в 2), $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 1$, $4 \mapsto 3$. Вообще, если $\sigma \in S_n$, то $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Задача 2. Сколько разных таблиц размера $2 \times n$ задают одну и ту же перестановку?

Определение 2. *Произведение* перестановок $\sigma, \tau \in S_n$ определяется так: $\sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i))$ (для произвольных отображений σ и τ такое произведение обычно называется *композицией отображений*). Например, если

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{то} \qquad \sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что сначала применяется второй сомножитель, а потом первый.

Задача 3. Перед Петей на столе лежат в ряд n шариков, пронумерованные по порядку числами от 1 до n. Петя переставил местами шарики. Пусть α сопоставляет числу k число $\alpha(k)$ — номер места в ряду, на котором оказался шарик под номером k. **а)** Покажите, что α — перестановка из S_n. **б)** Затем Петя повторил движения рук (опять переставил шарики, даже не глядя на них). На этот раз шарик под номером k оказался на месте под номером $\beta(k)$. Выразите перестановку β через перестановку α.

Задача 4. **а)** Всегда ли $\sigma\tau = \tau\sigma$? **б)** Пусть $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Найти $\sigma\tau$ и $\tau\sigma$.

Задача 5. Найдите такую перестановку e, что $e\alpha = \alpha e = \alpha$ при всех α (она называется *тождественной*). Докажите её единственность.

Определение 3. Перестановка α^{-1}, такая что $\alpha\alpha^{-1} = e$, называется *обратной* к перестановке α.

Задача 6. **а)** Докажите, что α^{-1} существует и единственна. **б)** Найдите α^{-1} для каждой α из S_3.

Задача 7. Какой шарик стоит на месте k после применения перестановки α из задачи 3?

Задача 8. Пусть p — простое число, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ — классы вычетов по модулю p. Докажите, что умножение на ненулевой остаток $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ является перестановкой ненулевых остатков $\{1, 2, \dots, p-1\}$, причём $a = 1$ соответствует тождественной перестановке, обратный элемент — обратной, а произведение — композиции.

Задача 9. $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами. Пусть $P(Q(x)) - x$ делится на 100 при любом целом x. Докажите, что тогда $Q(P(x)) - x$ делится на 100 при любом целом x.

Задача 10. Во дворе стоят **а)** 17 **б)** 18 мальчиков. У каждого в руках мяч. Вдруг они одновременно кинули свои мячи друг другу. Петя и Вася наблюдали за ними. Петя утверждает, что может мысленно расположить мальчиков в круг так, что каждый кинул стоящему через одного по часовой стрелке. Аналогично Вася, но в кругу Васи каждый кидает стоящему через двух по часовой стрелке. Не врут ли Петя и Вася?

Определение 4. Если элементы $a_1, a_2, \dots, a_k$ различны, то перестановка, при которой $a_1 \mapsto a_2$, $a_2 \mapsto a_3$, $\dots$, $a_k \mapsto a_1$, а все остальные элементы множества $\{1, \dots, n\}$ переходят в себя, называется *циклом* и обозначается $(a_1\ a_2\ \dots\ a_k)$. Число k называют *длиной* цикла. Цикл длины 2 называется *транспозицией*.

Задача 11. Сколько всего различных циклов длины k в S_n?

Задача 12. Докажите, что любая перестановка из S_n однозначно, с точностью до порядка множителей, разлагается в произведение «непересекающихся» (*независимых*) циклов (циклы длины 1 обычно пропускают).

Задача 13. Какие перестановки из S_4 — не циклы? Разложите их в произведение независимых циклов.

Задача 14. Текст на русском языке зашифрован программой, заменяющей взаимно однозначно каждую букву на некоторую другую. **а)** Докажите, что существует такое число k, что текст расшифровывается применением k раз шифрующей программы. **б)** Найдите хотя бы одно такое k.

Определение 5. Минимальное натуральное k такое, что α^k — тождественная перестановка, называется *порядком* перестановки α и обозначается $\operatorname{ord}\alpha$.

Задача 15. Найдите порядки: **а)** перестановок из S_3; **б)** цикла длины k; **в)** перестановок задачи 10.

Задача 16. Найдите все α из S_n, для которых $\alpha = \alpha^{-1}$.

Задача 17. Пусть α — это $(1\,2 \dots n)^k$. На сколько независимых циклов раскладывается α, каковы их длины?

Задача 18. Найдите максимальный возможный порядок перестановки **а)** из S_5; **б)** из S_{13}.

Задача 19. Докажите, что порядок перестановки из S_n делит $n!$.