Определение 1. Говорят, что многочлен $P(z)$ имеет корень α кратности k, если $P(z)$ делится на $(z-\alpha)^k$, но не делится на $(z-\alpha)^{k+1}$.

Теорема 1. *Произвольный многочлен степени $n>0$ с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней (считаемых со своими кратностями).*

Определение 2. Комплексная функция $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ комплексной переменной *непрерывна* в точке $z_0\in\mathbb{C}$, если для всякого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta>0$, что при всех z, где $|z-z_0|<\delta$, верно $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$.

Задача 1✎. Пусть $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{R}$ — вещественная функция на комплексной плоскости. Дайте определение того, что **а)** f ограничена на $\mathbb{C}$; **б)** $\lim\limits_{|z|\to+\infty} f(z)=+\infty$.

Задача 2. Пусть $F(z)=f(z)+ig(z)$, где f и g — функции из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{R}$. Докажите, что функция F непрерывна в точке z_0 тогда и только тогда, когда функции f и g непрерывны в точке z_0.

Замечание. Далее $P(z)$ — произвольный многочлен степени $n>0$ от комплексной переменной z с комплексными коэффициентами. $P(z)$ задаёт функцию из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, а $|P(z)|$ — функцию из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{R}$.

Задача 3✎. (*Поведение многочлена на бесконечности*) Докажите, что $|P(z)|\to+\infty$ при $|z|\to+\infty$.

Задача 4. **а)** (*Непрерывность многочлена*) Докажите, что функция $P(z)$ непрерывна на $\mathbb{C}$.
б) (*Непрерывность модуля многочлена*) Докажите, что функция $|P(z)|$ непрерывна на $\mathbb{C}$.

Задача 5. (*Поведение многочлена в круге*) Докажите, что $|P(z)|$ ограничен в любом круге (конечного радиуса) и достигает в нём своих максимума и минимума. (Вместо круга разрешается решить эту задачу для квадрата со сторонами, параллельными осям координат — этого достаточно для дальнейшего.)

Задача 6. (*Разложение Тейлора*) Докажите, что для любого $z_0\in\mathbb{C}$ существуют такое $k\in\mathbb{N}$ и такие $c_k, c_{k+1},\dots,c_n\in\mathbb{C}$, что $c_k\neq 0$ и для любого $z\in\mathbb{C}$ справедливо равенство

$$P(z)=P(z_0)+c_k(z-z_0)^k+c_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\dots+c_n(z-z_0)^n \qquad (*)$$

Представление $P(z)$ в таком виде называется *разложением Тейлора многочлена $P(z)$ в точке z_0*.

Задача 7✎. Напишите разложение Тейлора для многочленов
а) $P(z)=z^3-3z-2$ в точке $z_0=-1$; **б)** $P(z)=iz^3+2z^2-iz+179$ в точке $z_0=i$;

Задача 8✎. (*Вспомогательная лемма для следующей задачи*) Пусть $(*)$ — разложение Тейлора многочлена $P(z)$ в точке $z_0\in\mathbb{C}$, и пусть $\mathbb{D}(z_0,r)$ — круг с центром в z_0 радиуса r. Докажите, что существует такое $r>0$, что для любого $z\in\mathbb{D}(z_0,r)$, $z\neq z_0$ выполнено $|P(z)|<|P(z_0)+c_k(z-z_0)^k|+|c_k(z-z_0)^k|$.

Задача 9. (*Поведение многочлена в малой окрестности точки*) Пусть $P(z_0)\neq 0$. Докажите, что существует такое z_1, что $|P(z_1)|<|P(z_0)|$.

Задача 10✎. (*Поведение многочлена на плоскости*)
а) Докажите, что $|P(z)|$ достигает на плоскости своего минимума: существует такое $\mu\geqslant 0$, что $|P(z)|\geqslant\mu$ при любом $z\in\mathbb{C}$, причём найдётся такое $z_0\in\mathbb{C}$, что $|P(z_0)|=\mu$.
б) Пусть μ такое, как в п. а). Докажите, что $\mu=0$.

Задача 11. **а)** Докажите, что всякий многочлен ненулевой степени с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень. **б)** Выведите из пункта а) основную теорему алгебры.

Задача 12✎. Разложите в произведение многочленов не более чем второй степени с вещественными коэффициентами многочлены **а)** x^4+3x^2+2; **б)** x^4+4; **в)** x^6+8; **г)** x^n-1; **д)** $x^{2n}-\sqrt{3}x^n+1$.

Задача 13. Докажите, что произвольный многочлен с вещественными коэффициентами раскладывается в произведение многочленов не более чем второй степени с вещественными коэффициентами.

Задача 14✎. Многочлен $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ таков, что $P(x)\geqslant 0$ при всех $x\in\mathbb{R}$. Докажите, что его можно представить в виде суммы **а)** квадратов многочленов из $\mathbb{R}[x]$; **б)** двух таких квадратов.

Задача 15. Докажите, что максимум функции $|P(z)|$ в фиксированном круге достигается в некоторой точке граничной окружности этого круга.

1 а	1 б	2	3	4 а	4 б	5	6	7 а	7 б	8	9	10 а	10 б	11 а	11 б	12 а	12 б	12 в	12 г	12 д	13	14 а	14 б	15