Задача 1. Школьник дал такое определение непрерывности функции f в точке a: «существует $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ и любого $x \in (a-\delta, a+\delta)$ выполнено $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$». **а)** Будет ли «непрерывной» при этом определении хоть в одной точке функция x^2? **б)** Какое свойство функции описано этим определением?

Задача 2. Функция f монотонно возрастает на отрезке $[a; b]$. Известно, что для любого числа k из отрезка $[f(a); f(b)]$ найдется такое число $c \in [a; b]$, что $f(c) = k$. Обязательно ли f непрерывна на отрезке $[a; b]$?

Задача 3. Пусть $f \in C(\mathbb{R})$, f не константа. Докажите, что найдётся такое $r \notin \mathbb{Q}$, что $f(r) \notin \mathbb{Q}$.

Задача 4✎. Пусть существует такая константа $C > 0$, что на некотором интервале I выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| < C|x - y|$. Докажите, что f непрерывна на этом интервале.

Задача 5. Докажите, что **а)** $\sin x < x$ при $x > 0$; **б)** $x < \operatorname{tg} x$ при $0 < x < \pi/2$.

Задача 6. Докажите непрерывность (на области определения): **а)** $\sin x$; **б)** $\cos x$; **в)** $\operatorname{tg} x$.

Задача 7✎. Пусть $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 1$. Докажите, что f непрерывна на $\mathbb{R}$.

Задача 8. Функции f и g непрерывны на $\mathbb{R}$. Верно ли, что $\max(f(x), g(x))$ непрерывна на $\mathbb{R}$?

Задача 9✎. (Теорема Л. Брáуэра о неподвижной точке для отрезка). Пусть $f \in C([0; 1])$ и все значения функции f содержатся в отрезке $[0; 1]$. Докажите, что уравнение $f(x) = x$ имеет корень.

Задача 10. Пусть $f \in C(\mathbb{R})$ и уравнение $f(x) = x$ не имеет корней. Имеет ли корни уравнение $f(f(x)) = x$?

Задача 11. **а)** Уравнение $x^3 + ax + 1 = 0$ имеет три действительных корня. Докажите, что для некоторого $\varepsilon > 0$ уравнение $x^3 + bx + 1 = 0$ имеет три действительных корня при каждом $b \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. **б)** Пусть $f(t) = \min\{x \mid x^3 + tx + 1 = 0\}$. Верно ли, что f непрерывна в некой окрестности a из пункта а)? А на $\mathbb{R}$?

***

Задача 12. Однажды утром (в 9^{00}) турист вышел из лагеря к вершине горы и добрался туда в 20^{00}. В 9^{00} следующего дня он начал спуск с вершины (по той же тропе, что и поднимался) и в 20^{00} вернулся в лагерь. Найдётся ли на тропе точка, которую турист проходил в одно и то же время в день подъёма и в день спуска?

Задача 13. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, $(a; b)$ — любая точка на координатной плоскости. Докажите, что среди всех точек графика функции f найдётся такая, расстояние от которой до точки (a, b) минимально (не больше, чем расстояние от любой другой точки графика f до $(a; b)$).

Задача 14. Выпуклый многоугольник M, прямая l и точка A лежат в одной плоскости. Докажите, что найдётся прямая l', делящая M на две равновеликие части и **а)** параллельная l; **б)** проходящая через A.

Задача 15✎. Пусть S^1 — окружность на плоскости. **а)** Дайте определение непрерывной функции $f : S^1 \to \mathbb{R}$. **б)** Пусть $f : S^1 \to \mathbb{R}$ непрерывна. Докажите, что у S^1 найдётся такой диаметр AB, что $f(A) = f(B)$.

Задача 16. (Теоремы о блинах). На сковороде лежат два блина (многоугольники). Докажите, что
а) есть прямая, делящая каждый блин на две равновеликие части (часть может состоять из многих кусков);
б) найдутся две перпендикулярные прямые, делящие первый блин на четыре равновеликие части.

Задача 17. Верно ли, что каждая внутренняя точка любого выпуклого многогранника принадлежит какому-то отрезку, концы которого находятся на рёбрах этого многогранника?

Задача 18*. Фигура ограничена и выпукла. Всегда ли **а)** вокруг неё можно описать квадрат; **б)** в неё можно вписать квадрат, если она центрально-симметрична; **в)** некая прямая делит пополам её площадь и периметр?

Определение 1. Говорят, что у функции $f : M \to \mathbb{R}$ есть на графике *горизонтальная хорда длины* δ, если найдутся такие точки $x, y \in M$, что $|x - y| = \delta$ и $f(x) = f(y)$.

Задача 19. Пусть f — непрерывная периодическая функция на $\mathbb{R}$ с периодом T. Докажите, что ее график имеет горизонтальную хорду длины а) $T/2$; в) $T/3$; г) Tq при любом $q \in \mathbb{Q}$; д) l при любом $l \in \mathbb{R}$.

Задача 20. Пусть $f \in C([0; 1])$, $f(0) = f(1)$. Для каких a у f обязательно есть горизонтальная хорда длины a?

Задача 21*. Среди ровной степи стоит гора. На вершину ведут две тропы (считаем их графиками непрерывных функций), не опускающиеся ниже уровня степи. Два альпиниста одновременно начали подъём (по разным тропам), соблюдая условие: всё время быть на одинаковой высоте. Смогут ли они достичь вершины, двигаясь непрерывно, если **а)** тропы состоят из конечного числа подъёмов и спусков; **б)** в общем случае?

Задача 22*. Из A в B ведут две дороги, не пересекающие друг друга и сами себя. Две машины, связанные верёвкой длины 15 м, проехали из A в B по разным дорогам, не порвав верёвки. Два круглых воза радиуса 8 м выезжают одновременно по разным дорогам, один из A в B, другой из B в A. Могут ли они разминуться?

1 а	1 б	2	3	4	5 а	5 б	6 а	6 б	6 в	7	8	9	10	11 а	11 б	12	13	14 а	14 б	15 а	15 б	16 а	16 б	17	18 а	18 б	18 в	19	20	21 а	21 б	22