Листок №44

Непрерывность: основные определения и теоремы

03.02.2020 – 17.02.2020
35/29/23 з. на 5/4/3

Определение 1. (*Непрерывность по Коши*) Пусть $M \subseteq \mathbb{R}$. Говорят, что функция $f : M \to \mathbb{R}$ *непрерывна в точке* $a \in M$, если для любой окрестности $\mathcal{V}$ точки $f(a)$ найдётся такая окрестность $\mathcal{W}$ точки a, что при всех x из $\mathcal{W} \cap M$ число $f(x)$ лежит в $\mathcal{V}$. Обозначение: $f \in C(a)$.
Если f непрерывна в каждой точке из M, говорят, что f *непрерывна на* M, и пишут $f \in C(M)$.

Замечание. Для простоты можно считать, что M вместе с каждой своей точкой содержит какую-то окрестность или хотя бы полуокрестность этой точки. Но это упрощение необязательно, и вы можете попробовать справиться без него.

Задача 1. Запишите без отрицаний: «$f : M \to \mathbb{R}$ *разрывна* (не непрерывна) в точке $a \in M$».

Задача 2. В каких точках непрерывны функции: **а)** x; **б)** $\operatorname{sgn} x$; **в)** x^2; **г)** $\{x\}$; **д)** $\frac{1}{x}$; **е)** $\sqrt{x}$. (Функцию, заданную формулой, мы считаем определённой всюду, где эта формула имеет смысл.)

Определение 2. Пусть $M \subseteq \mathbb{R}$. Говорят, что функция $f : M \to \mathbb{R}$ *ограничена на* M, если найдётся такое число k, что $|f(x)| < k$ при всех $x \in M$.

Задача 3. Будет ли функция, непрерывная в точке a, ограничена в какой-то окрестности точки a?

Задача 4. Пусть $f : M \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in M$, причём $f(a) > 0$. Докажите, что существует такая окрестность $\mathcal{U}$ точки a, что f положительна на множестве $\mathcal{U} \cap M$.

Задача 5. (*Непрерывность по Гейне*) Пусть $M \subseteq \mathbb{R}$. **а)** Докажите, что если функция $f : M \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in M$, то для любой последовательности x_n элементов M, сходящейся к a, последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(a)$. **б)** Докажите обратное утверждение.

Задача 6. Пусть $f, g \in C(a)$. Докажите, что **а)** $|f| \in C(a)$; **б)** $f \pm g \in C(a)$; **в)** $f \cdot g \in C(a)$; **г)** если $g(a) \neq 0$, то функция $\frac{f}{g}$ непрерывна в точке a.

Задача 7. Докажите непрерывность функции (на её области определения):
а) x^n, где $n \in \mathbb{N}$; **б)** многочлен из $\mathbb{R}[x]$; **в)** $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $Q \neq 0$; **г)** $\sqrt[n]{x}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Задача 8. Придумайте определённую на $\mathbb{R}$ функцию f, множество точек разрыва которой есть
а) $\mathbb{R}$; **б)** $\mathbb{R}$ без одной точки; **в)** $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$; **г)*** $\mathbb{Q}$.

Задача 9. Пусть $f \in C([a;b])$, причём числа $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки. Докажите, что найдётся такое $\gamma \in (a;b)$, что $f(\gamma) = 0$, с помощью **а)** деления отрезка пополам; **б)** аксиомы о существовании точной верхней грани; **в)** компактности отрезка.

Задача 10. (Теорема о промежуточном значении). Пусть $f \in C([a;b])$, причём $f(a) < f(b)$. Докажите, что для любого $k \in [f(a); f(b)]$ найдётся такая точка $\gamma \in [a;b]$, что $f(\gamma) = k$.

Задача 11. Докажите, что любой многочлен нечётной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.

Задача 12. Функция непрерывна на отрезке I. Докажите, что она
а) ограничена на I; **б)** достигает своего наибольшего и наименьшего значений на I.
в) Верны ли утверждения предыдущих пунктов, если I — интервал или прямая?

Определение 3. *Промежутком* называется любой отрезок, интервал, полуинтервал, луч (замкнутый или открытый, то есть с началом или без), а также вся действительная прямая.

Задача 13. Непостоянная функция f определена и непрерывна на промежутке $I \subseteq \mathbb{R}$. Каким может быть множество значений этой функции на I, если I — это
а) отрезок; **б)** интервал; **в)** полуинтервал; **г)** открытый луч; **д)** замкнутый луч; **е)** прямая?

Задача 14. Пусть $f, g \in C(\mathbb{R})$, причём $f(x) = g(x)$ для любого $x \in \mathbb{Q}$. Докажите, что $f = g$.

Задача 15. Найдите все $f \in C(\mathbb{R})$, такие что $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

1	2 а	2 б	2 в	2 г	2 д	2 е	3	4	5 а	5 б	6 а	6 б	6 в	6 г	7 а	7 б	7 в	7 г	8 а	8 б	8 в	8 г	9 а	9 б	9 в	10	11	12 а	12 б	12 в	13 а	13 б	13 в	13 г	13 д	13 е	14	15