Задача 1. Натуральное число представимо в виде суммы двух квадратов (целых чисел) тогда и только тогда, когда любое простое число вида $4k+3$ входит в его разложение на простые множители в чётной степени.

Задача 2. **а)** Докажите, что если два числа представимы в виде $a^2 + db^2$ (где d — фиксированное натуральное число), то и их произведение представимо в таком виде.
б) Найдите все простые числа, которые представляются в виде $a^2 + 4b^2$.

Задача 3. **а)** Обозначим через $r(n)$ количество решений уравнения $a^2 + b^2 = n$ в натуральных числах. Докажите, что если m, n взаимно просты, то $r(mn) = r(m)r(n)$. **б)*** Обозначим через $r_d(n)$ количество решений уравнения $a^2 + db^2 = n$ в целых числах. Верно ли предыдущее утверждение при $d > 1$?

Задача 4*. **а)** Как посчитать $r(n)$ из задачи 3? **б)** Для каких натуральных k существует окружность, на которой лежит ровно k точек с целыми координатами?

Задача 5. (Пифагоровы тройки) **а)** Пусть a, b, c — такие взаимно простые целые числа, что $a^2+b^2 = c^2$. Тогда $c = |z|^2$ для некоторого $z \in \mathbb{Z}[i]$. **б)** Укажите все тройки целых чисел $a, b, c \in \mathbb{Z}$, таких что $a^2 + b^2 = c^2$. (То есть напишите формулу, которая дает в точности все такие тройки при подстановке в нее целых чисел)

Задача 6. Решите в целых числах уравнение $y^3 = x^2 + 1$.

Задача 7. **а)** Докажите, что ни при каком n число $(3 + 4i)^n$ не является вещественным.
б) Докажите, что угол $\operatorname{arctg} 3/4$ не выражается рациональным числом градусов.
в)* Найдите все такие натуральные k, что $\cos \pi/k$ и $\sin \pi/k$ рациональны.

Задача 8.
а) Дайте определение множеству чисел $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}] = \mathbb{Z}[\sqrt{n}i]$. Определения из прошлого листка (делимость, ассоциированные элементы, обратимые, простые) дословное переносятся на произвольное множество вида $\mathbb{Z}[\sqrt{n}i]$.
б) Найдите все обратимые числа в $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.
в) При каких n число 2 является простым в $\mathbb{Z}[\sqrt{n}i]$?
г) Для каких n работает алгоритм Евклида, описанный в листке 42?

Задача 9. Есть ли в $\mathbb{Z}[\sqrt{n}i]$ однозначное разложение на простые множители с точностью до ассоциированности для
а) $n = 2$;
б) $n = 3$ (Указание: используйте равенство $(1 + \sqrt{3}i) \cdot (1 - \sqrt{3}i) = 2 \cdot 2$);
в) $n = 4$ (Годится ли равенство $2 \cdot 2 = (-2) \cdot (-2)$? $2 \cdot 2 = 2i \cdot (-2i)$?);
г) $n = 5$;
д) $n > 5$?

1	2 а	2 б	3 а	3 б	4 а	4 б	5 а	5 б	6	7 а	7 б	7 в	8 а	8 б	8 в	8 г	9 а	9 б	9 в	9 г	9 д