Листок №42 | 11.12.2019–25.12.2019 | 22/18/14 з. на 5/4/3

Гауссовы целые числа

В этом листке мы перенесём понятия делимости, общих делителей, разложения на простые сомножители на «целые комплексные числа».

Определение 1. Числа вида $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, называются *гауссовыми целыми числами* или просто *гауссовыми числами*. Множество всех гауссовых чисел обозначается $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ или $\mathbb{Z}[i]$. Легко видеть, что сумма и произведение гауссовых чисел – снова гауссовы. Как обычно, скажем, что гауссово число x *делит* гауссово число y, если существует такое гауссово z, что $y = xz$.

Если $z = a + bi \neq 0$ — гауссово число, то его *норма* $N(z) = |z|^2 = a^2 + b^2$ — *натуральное число. Делимость гауссовых чисел связана с нормой, как показывает следующее утверждение.*

Задача 1. Докажите, что для всех $z \in \mathbb{Z}[i]$ **а)** z делит $N(z)$; **б)** если x делит y, то $N(x)$ делит $N(y)$.

Задача 2. Для следующих пар чисел выясните, делится ли какое-либо из них на другое, и найдите частное: $1 + i$ и 8; $2 + i$ и $3 + i$; $4 - 3i$ и $3 + 4i$.

Задача 3. Докажите, что для гауссовых чисел x и y следующие свойства эквивалентны: (1) Множество делителей x совпадает с множеством делителей y; (2) x делит y и y делит x; (3) $x = ry$, где $N(r) = 1$.

Задача 4. **а)** Гауссово число x называется *обратимым*, если оно делит 1. Докажите, что обратимые числа в точности числа с нормой 1. **б)** Найдите все обратимые гауссовы числа.

Как видно из задач 3 и 4, в гауссовых числах делимость «не различает» числа, получающиеся друг из друга умножением на обратимые. Такие числа называются *ассоциированными.* У ассоциированных чисел одинаковые делители и делимые. Как следствие, все свойства делимости (простота, обратимость, разложимость) одинаковы для ассоциированных чисел, а разложение на простые и наибольший общий делитель определены с точностью до ассоциированности.

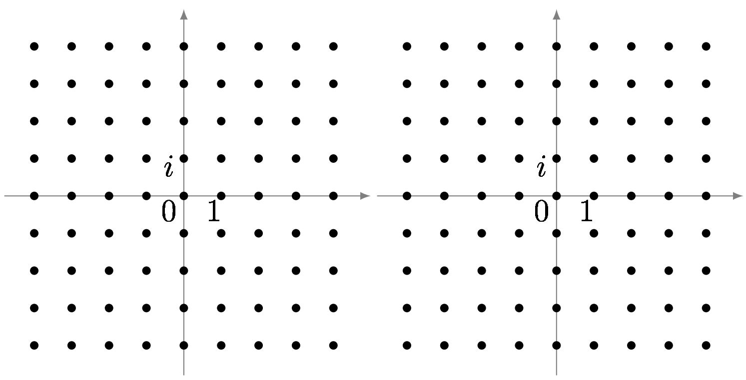
Определение 2. Гауссово необратимое число $x \neq 0$ называется *простым*, если для любого разложения $x = yz$ какое-то из чисел y, z обратимо.

Задача 5. Являются ли простыми следующие гауссовы числа: $-i$, 2, 3, $1 + i$, $2 + i$, $1 + 2i$?

Задача 6. Докажите, что гауссово число с простой нормой является простым.

Задача 7. Докажите, что простые натуральные числа разбиваются на два непересекающиеся множества: простые гауссовы числа и числа, которые являются нормой простых гауссовых чисел.

Задача 8. **а)** Простое натуральное число p является нормой гауссового числа тогда и только тогда, когда $p = a^2 + b^2$ для натуральных a, b. **б)** Какие простые числа $p \leqslant 29$ являются простыми гауссовыми? **в)** Сформулируйте гипотезу об этих числах в общем виде и докажите её (Указание: используйте задачу 14 из листка 23).



Задача 9. Отметьте на картинке справа обратимые и простые числа. Для всех остальных найдите разложение в произведение простых.

Задача 10. **а)** Нарисуйте на картинке справа все гауссовы числа, кратные $1+2i$. **б)** Докажите, что для любых гауссовых чисел x, y, $y \neq 0$ найдутся такие гауссовы q, r, что $x = qy + r$ и $|r| < |y|$. **в)** Единственны ли такие q, r? Если нет, то сколько их может быть?

Задача 11. Определите наибольший общий делитель двух гауссовых чисел, докажите, что он существует и представляется в виде их линейной комбинации (коэффициенты — гауссовы).

Задача 12. Найдите наибольший общий делитель чисел **а)** $7 - i$ и $-4 + 7i$; **б)** $5 + 3i$ и $6 - 4i$.

Определение 3. Гауссовы числа x, y называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель обратим.

Задача 13. **а)** Верно ли, что целые числа a и b взаимно просты (как целые), если они взаимно просты как гауссовы? **б)** Верно ли обратное? **в)** Верно ли, что $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ — гауссовы взаимно простые числа, если $N(x)$ и $N(y)$ — взаимно просты (как натуральные)? **г)** Верно ли обратное?

Задача 14. Докажите, что если гауссово простое делит произведение xy, то оно делит либо x, либо y.

Задача 15. Сформулируйте и докажите основную теорему арифметики для гауссовых чисел.

1 а	1 б	2	3	4 а	4 б	5	6	7	8 а	8 б	8 в	9	10 а	10 б	10 в	11	12 а	12 б	13 а	13 б	13 в	13 г	14	15