Листок №13д

Потоки на графах

07.10.2019

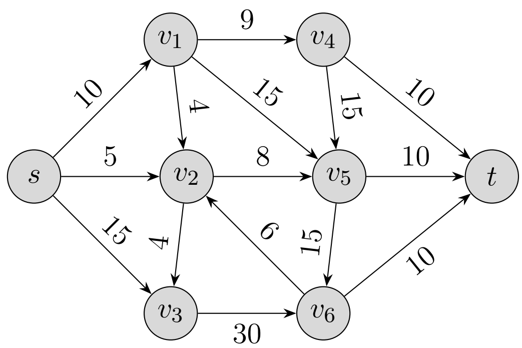
Мы будем изучать *потоки* на графах. Мы хотим смоделировать поток жидкости по системе труб, или электрического тока по проводам, или автомобилей по дорогам из одной точки в другую.

Определение 1. *Транспортной сетью* или просто *сетью* называется ориентированный граф[1] $G = (V, E)$, в котором выделены две вершины: *источник* s и *сток* t, и для каждого ребра $(x, y) \in E$ заданы *пропускные способности*— неотрицательные числа $c(x, y)$. Пропускная способность ребра (x, y) задаёт максимальное количество «жидкости» или «тока», которая может перетечь из x в y.

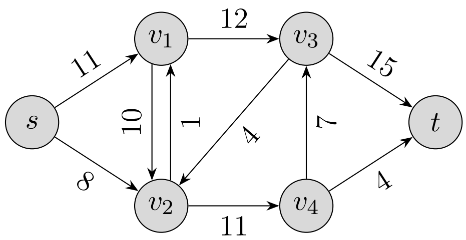
Задача о минимальном разрезе

Предположим, что нам надо «отрезать» источник от стока, затратив при этом минимальные усилия. Считается, что на разрез одного ребра уходит столько сил, какова пропускная способность этого ребра. Формально, *разрезом транспортной сети* $[A,\ B]$ назовём такое разбиение[2] вершин графа $V = A \sqcup B$, что $s \in A$, $t \in B$. *Пропускная способность разреза* $c([A,\ B]) = \sum_{x\in A, y\in B} c(x, y)$ — сумма пропускных способностей рёбер, идущих из A в B.

Задача 1. Для транспортной сети G_1 найдите разрез пропускной способности **а)** 62; **б)** 30; **в)** меньше 30.



Сеть G_1



Сеть G_2

Задача 2. Пусть $[A,\ B]$ и $[C,\ D]$ — два разреза минимальной пропускной способности. Являются ли минимальными разрезы $[A \cup C, \overline{A \cup C}]$ и $[A \cap C, \overline{A \cap C}]$?

Задача 3. (*Теорема о бутылочном горлышке*) **а)** Для каждого разреза $[A,\ B]$ транспортной сети найдём ребро из A в B максимальной пропускной способности, и из получившихся чисел выберем наименьшее:

$$\underline{c} = \min_{[A,\ B]} \max_{x\in A, y\in B} c(x, y).$$

Найдите $\underline{c}$ для транспортных сетей G_1,G_2.

б) Пусть W — множество путей из s в t. Для каждого пути $w \in W$ транспортной сети найдём ребро минимальной пропускной способности, и из получившихся чисел выберем наибольшее: $\overline{c} = \max_{w\in W} \min_{e\in w} c(e)$. Найдите $\overline{c}$ для транспортных сетей G_1, G_2. **в)** Докажите в общем случае, что $\underline{c} = \overline{c}$.

Как показывает задача 3, вопросы о разрезах связаны с «пропускными способностями» путей из источника в сток. Чтобы оценить пропускные способности набора путей, введём понятие потока.

Определение 2. *Потоком* на транспортной сети называется способ написать на всех рёбрах *потоки* — такие числа $f(x, y)$, что выполняются два свойства:

1. для всех вершин, кроме источника и стока, сумма потоков входящих рёбер равна сумме потоков исходящих рёбер. В виде формулы это условие можно записать так:
$$\text{если } y \text{ — не источник, и не сток, то} \sum_{x:(x,y)\in E} f(x, y) = \sum_{z:(y,z)\in E} f(y, z);$$
2. поток каждого ребра неотрицателен и не превышает его пропускную способность:
$$0 \leqslant f(x, y) \leqslant c(x, y).$$

Величиной потока $v(f)$ называют сумму потоков из источника.

Задача 4. Для сети G_1 постройте поток величиной числа α, где **а)** $\alpha \leqslant 24$; **б)** $\alpha \leqslant 28$.

Определение 3. *Поток через разрез* — сумма всех потоков из вершины, лежащей в A в вершину, лежащую в B минус сумма всех потоков из вершин, лежащих в B, в вершину, лежащую в A, то есть $f(A, B) - f(B, A) = \sum_{x\in A, y\in B} f(x, y) - \sum_{x\in A, y\in B} f(y, x)$.

[1] Формальное определение такое: V — конечное множество вершин, E — множество упорядоченных пар вершин, запись $(x, y) \in E$ означает, что есть ребро с началом в x и концом в y. В графе могут быть ребра (x, y) и (y, x), но не допускаются кратные рёбра и петли.

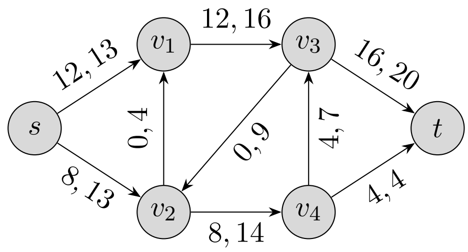
[2] $A \sqcup B$ означает, что $A \cup B = V$ и $A \cap B = \emptyset$.

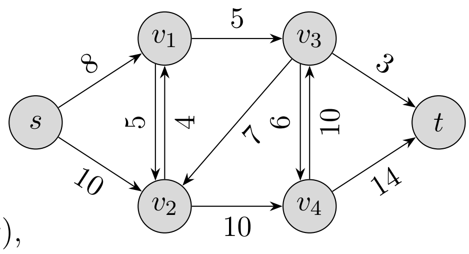
Задача 5. Докажите, что **а)** для любого разреза $[A, B]$ поток через разрез равен величине потока: $v(f) = f(A, B) - f(B, A)$. **б)** величина потока равна сумме потоков в сток, то есть

$$v(f) = \sum_{x:(x,t) \in E} f(x, t).$$

Задача 6. **а)** Докажите, что величина произвольного потока не превосходит пропускной способности любого разреза. **б)** Найдите поток максимальной величины и разрез минимальной пропускной способности сети G_1.

В следующей задаче мы приводим идею по построению *максимального потока* (потока с максимальной величиной).





Задача 7. Предположим, что нам дана транспортная сеть с пропускной способностью $c(x, y)$. **а)** Максимальный поток в сети положителен тогда и только тогда, когда существует путь из источника в сток, проходящий по рёбрам с положительной пропускной способностью.

Попробуем для имеющегося потока $f(x, y)$ перестроить сеть, чтобы увеличить мощность. Рассмотрим два определения остаточной сети.

Остаточная сеть-1. Это сеть с тем же множеством вершин и рёбер, а пропускная способность ребра из x в y равна $c(x, y) - f(x, y)$.

Остаточная сеть-2. Это сеть с тем же множеством вершин, а пропускная способность ребра из x в y равна $c(x, y) - f(x, y)$, а ребра из y в x равна $f(x, y)$. Если ребра из y в x не было, его надо добавить. Если возникло два ребра из y в x, то заменим их на одно ребро суммарной пропускной способности.

б) Нарисуйте остаточные сети-1 и -2 для потока, изображённого справа.

в) Верно ли, что поток f не является максимальным тогда и только тогда, когда максимальный поток в остаточной сети-1 положителен? остаточной сети-2 положителен?

г) Найдите максимальные потоки для сетей, изображённых справа.

Задача 8. Для потока F на транспортной сети следующие условия эквивалентны:

(1) F — максимальный поток;

(2) В остаточной сети потока F нет потока положительной величины.

(3) Существует разрез пропускной способности $v(f)$.

Задача 9. (*теорема Форда-Фалкерсона*) Наименьшая пропускная способность разреза равна величине максимального потока.

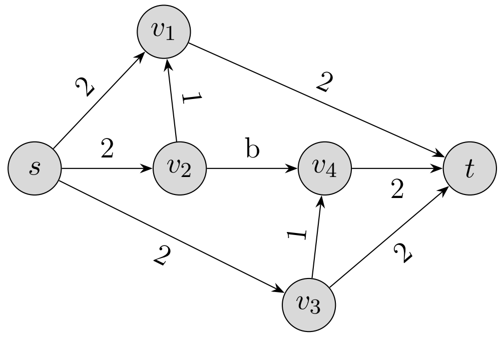
Задача 10. Предположим, что пропускные способности всех рёбер в сети — целые числа.

а) Опишите алгоритм, позволяющий находить максимальный поток в этой сети. Проверьте, что алгоритм в какой-то момент остановится, а не будет работать бесконечно долго. Этот алгоритм называется алгоритмом Форда-Фалкерсона.

б) Докажите, что в сети существует целочисленный поток, то есть поток, в котором величина потока на любом ребре целая.

в) Существует ли сеть такого вида с нецелочисленным максимальным потоком?

г) Можно ли обобщить результат пункта а) на случай рациональных пропускных способностей?



Задача 11. Докажите, что для графа на рисунке справа алгоритм Форда-Фалкерсона будет работать бесконечно долго. Здесь $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

1 а	1 б	1 в	2	3 а	3 б	3 в	4 а	4 б	5 а	5 б	6 а	6 б	7 а	7 б	7 в	7 г	8	9	10 а	10 б	10 в	10 г	11