**Определение 1.** Часто каждому возможному исходу соответствует какое-то число. Например, число, написанное на выпавшей грани игрального кубика. Или сумма денег, которую мы получим от казино в случае выпадения комбинации. Тогда можно поинтересоваться, какое же число выпадает *в среднем*. Математики называют это «в среднем» *матожиданием* выпавшего числа.

**Задача 1.** Вам предлагают сыграть в игру. Вы платите 100 рублей и дважды бросаете игральную кость. Если сумма равна 12, то вам возвращают 1000 рублей. Стоит ли соглашаться?

**Задача 2.** Каждый из двух игроков пишет на бумажке число 1 или 2, после чего они одновременно открывают бумажки. Если числа совпали, то первый платит второму столько рублей, каковы эти числа; если нет — второй платит первому $a$ рублей. При каком значении $a$ эта игра будет честной? Разберите три случая:

**а)** Каждый игрок равновероятно выбирает 1 или 2.

**б)** Первый выбирает 1 с вероятностью $p$, а второй выбирает 1 с вероятностью $q$ (где $0 \leqslant p, q \leqslant 1$).

**в)*** Каждый игрок может использовать любую стратегию, при которой вероятность его выигрыша будет максимальной.

**Определение 2.** Пусть $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ — вероятностное пространство. *Случайной величиной* называется любая функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ (читается «функция кси из множества омега в действительные числа»), для которой для любого числа $t \in \mathbb{R}$ множество таких исходов $\omega \in \Omega$, что $\xi(\omega) \leqslant t$ является событием, то есть $\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \leqslant t\} \in \mathbb{A}$. Вероятность этого события обозначается через $P(\xi \leqslant t)$.
Обратите внимание: каждая случайная величина — это вполне конкретная функция. Случайного в ней только то, что она ставит в соответствие число каждому случайному исходу.
Функция $F_\xi(t) = P(\xi \leqslant t)$ называется *функцией распределения* случайной величины.
*Сумма двух случайных величин* на одном и том же ВП — это просто сумма функций.

**Задача 3✐.** Нарисуйте график функции распределения: **а)** случайной величины, равной числу, выпадающему на игральном кубике; **б)** случайного числа на отрезке $[0, 1]$; **в)** расстояние до центра мишени радиуса 1 от точки попадания точечной пули. **г)** Докажите, что функция распределения монотонно неубывает.

**Определение 3.** Пусть $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ — конечное или счётное вероятностное пространство. *Математическим ожиданием* случайной величины $\xi$ называется число $E\xi = \sum\limits_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) P(\omega)$ (от слова *expectation*).

**Задача 4✐.** В пакете лежат $n$ вкусных и $m$ невкусных конфеток, которые можно брать не глядя. Чему равно матожидание количества извлечённых конфет до получения первой вкусной, если **а)** $n = 1$ и $m = 1$; **б)** $n = 1$ и $m = 2$; **в)** $n = 2$ и $m = 3$? **г)** Выразите это матожидание через аналогичное для меньшего числа конфет.

**Задача 5.** Предположим, случайная величина $\xi$ принимает значения в $\mathbb{N}$. Покажите, что формулу для её матожидания можно переписать так: $E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P(\xi = i)$ или $E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} P(\xi \geqslant i)$.

**Задача 6✐.** (*Линейность матожидания*) Пусть случайная величина $\xi$ раскладывается в сумму некоторого числа более простых случайных величин: $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k$. Докажите что тогда $E\xi = E\xi_1 + E\xi_2 + \ldots + E\xi_k$.

**Задача 7.** 50 мужчин и 50 женщин случайно рассаживаются за круглый стол. Назовем мужчину довольным, если рядом с ним сидит женщина. Для каждого мужчины введем случайную величину равную 1, если он окажется доволен, и 0 иначе. Найдите матожидание **а)** такой случайной величины; **б)** числа довольных мужчин.

**Задача 8.** Проводятся $n$ опытов, в каждом опыте может произойти определенное событие («успех») с вероятностью $p$ (или не произойти — «неудача» — с вероятностью $q = 1 - p$). Найдите матожидание числа смен успеха на неудачу и неудачи на успех.

| 1 | 2 а | 2 б | 2 в | 3 а | 3 б | 3 в | 3 г | 4 а | 4 б | 4 в | 4 г | 5 | 6 | 7 а | 7 б | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | |

**Задача 9✎.** В магазин послали $n$ школьников, вручив список из $m$ нужных предметов. Школьники потеряли список. Школьник помнит конкретный нужный предмет с вероятностью $p$. Найдите математическое ожидание количества нужных предметов, которые школьники смогут коллективно вспомнить.

**Задача 10.** Собралось $k$ случайных людей. Найдите матожидание числа пар людей с совпадающими днями рождения (для простоты можно считать, что никто не родился 29 февраля).

**Задача 11✎.** Если человек стоит в очереди минуту, будем говорить, что бесцельно затрачена одна человеко-минута. В очереди в банке стоит восемь человек, из них пятеро планируют простые операции, занимающие 1 минуту, а трое планируют операции, занимающие 10 минут. Рассмотрим суммарное количество бесцельно затраченных человеко-минут, найдите его **а)** наименьшее и наибольшее возможное значения; **б)** математическое ожидание, при условии, что порядок людей в очереди случаен.

**Задача 12.** Игра в «супершахматы» ведётся на доске размером $100 \times 100$, и в ней участвует 20 различных фигур, каждая из которых ходит по своим правилам. Известно, что любая фигура с любого места бьет не более 20 полей. Докажите, что можно расставить на доске все 20 фигур так, чтобы ни одна из них не била другую.

**Задача 13✎.** Монетка падает орлом вверх **а)** с вероятностью $1/2$; **б)*** с вероятностью $p$.
Найдите матожидание числа подбрасываний этой монетки до выпадения первого орла.

**Задача 14.** Школьнику нужно правильно ответить на вопрос с $n$ вариантами ответа. Он ничего не знает и каждый раз даёт случайный ответ. Найдите матожидание числа его попыток до правильного ответа, если он **а)** запоминает, какие ответы он уже давал; **б)*** даже не запоминает.

**Задача 15.** $n$ претендентов на должность в случайном порядке приходят на собеседование. Если в результате собеседования выясняется, что новый претендент лучше того, кто в данный момент занимает должность, первого нанимают, а последнего — увольняют. **а)** С какой вероятностью $k$-й по силе претендент будет нанят в какой-либо момент. **б)** Найдите матожидание числа увольнений.

**Задача 16.** Чтобы сгенерировать перестановку чисел от 1 до $n$, возьмём число 1 и случайно выберем число, в которое оно переходит. Потом случайно выберем число, в которое переходит только что выбранное число и т.д., пока цикл не замкнётся. Будем строить этим методом цикл за циклом, начиная с наименьшего из ещё не выбранных чисел. **а)** Докажите что все перестановки получатся с равной вероятностью. **б)** Чему равна вероятность того, что первый цикл имеет длину $m$. **в)** Найдите матожидание числа циклов в случайной перестановке. **г)** Найдите матожидание числа пассажиров, сидящих не на своих местах, в задаче про сумашедшую старушку.

**Задача 17*.** Пачка жевачки содержит один из $n$ разных, но равновероятных вкладышей. Сколько пачек нужно в среднем купить, чтобы собрать полную коллекцию вкладышей? Чему равно число для $n = 30$?

**Задача 18*.** На отрезке длины 1 случайным образом выбирают две точки, которые делят его на 3 части. Найдите матожидание координаты самой левой из них.

| 9 | 10 | 11 а | 11 б | 12 | 13 а | 13 б | 14 а | 14 б | 15 а | 15 б | 16 а | 16 б | 16 в | 16 г | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | |