Листок №36 | Условная вероятность | 09.09 – 18.09.2019
25/20/15 з. на 5/4/3

Задача 1. Пусть B — событие с ненулевой вероятностью. Определите *условную вероятность* $P(A\,|\,B)$ события A при условии, что событие B произошло (выразите её через $P(A)$, $P(B)$ и $P(AB)$).

Задача 2. Пусть вероятность рождения мальчика равна 1/2. Какова вероятность того, что в семье два мальчика, если один из детей — мальчик?

Задача 3. Вероятность попадания в цель при отдельном выстреле равна 0,2. Какова вероятность поразить цель, если в 2% случаев выстрел не происходит из-за осечки?

Определение 1. События A и B называются *независимыми,* если $P(A\,|\,B) = P(A)$.

Задача 4. Верно ли, что A и B независимы тогда и только тогда, когда **а)** $P(B\,|\,A) = P(B)$; **б)** $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$; **в)** независимы A и «не B»; **г)** независимы «не A» и «не B».

Задача 5. Из колоды в 52 карты выбирается наудачу одна карта. Независимы ли события
а) «выбрать вальта» и «выбрать пику»; **б)** «выбрать вальта» и «не выбрать даму»?

Определение 2. События $A_1, \ldots, A_n$ называются *независимыми в совокупности,* если для любых нескольких различных индексов $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$ выполнено: $P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \cdots \cdot P(A_{i_k})$.

Задача 6. Следует ли из попарной независимости нескольких событий их независимость в совокупности?

Задача 7. (*Теорема умножения вероятностей*) Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — события, вероятности которых больше 0. Докажите, что $P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n \mid A_1 \ldots A_{n-1})$.

Задача 8. (*О вреде подхалимства*) **а)** В жюри из трех человек вердикт выносят большинством голосов. Председатель и эксперт принимают верное решение независимо с вероятностями 0,7 и 0,9, а третий бросает монету. С какой вероятностью жюри принимает верное решение? **б)** А если третий будет копировать решение председателя? **в)** А если третий будет копировать решение эксперта?

Задача 9. Отец обещал сыну приз, если сын выиграет подряд хотя бы две теннисные партии против него и чемпиона по одной из схем: отец-чемпион-отец или чемпион-отец-чемпион. Чемпион играет лучше отца. Какую схему выбрать сыну?

Задача 10. (*Формула Байеса*) Выразите условную вероятность $P(A \mid B)$ через $P(B \mid A)$, $P(A)$ и $P(B)$.

Задача 11. (*Формула полной вероятности*) Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — попарно непересекающиеся (несовместные) события с суммарной вероятностью 1. Докажите, что $P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(B \mid H_i)$ для любого события B.

Задача 12. Два охотника одновременно выстрелили одинаковыми пулями в медведя и убили его одной пулей. Как им поделить шкуру, если вероятность попадания у первого — 0,3, а у второго — 0,6?

Задача 13. Три завода выпускают одинаковые изделия. Первый производит 50% всей продукции, второй — 20%, третий — 30%. Первый завод выпускает 1% брака, второй — 8%, третий — 3%. Выбранное наугад изделие — бракованное. Какова вероятность того, что оно со второго завода?

Задача 14. Из 100 симметричных монет одна фальшивая (с двумя орлами). Выбрали случайно монету, бросили 5 раз: выпали все орлы. С какой вероятностью следующие 10 раз снова выпадут все орлы?

Задача 15. У некого вида бактерий каждая бактерия через секунду после появления на свет делится с вероятностью p_k на k потомков, где $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, и с вероятностью p_0 умирает. Пусть x — вероятность того, что весь род, начавшийся с данной бактерии, когда-либо целиком вымрет. Докажите, что $x = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n$.

Задача 16. При обследовании вероятность обнаружить туберкулез у больного им равна 0,9, а вероятность принять здорового за больного равна 0,01. Туберкулёзом болеет 1/1000 населения. С какой вероятностью человек здоров, если его признали больным **а)** при одном обследовании; **б)** при двух независимых обследованиях?

Задача 17. Каждый житель города либо здоров, либо болен, а также либо богат, либо беден. Богатство и здоровье независимы (доля богатых здоровых среди богатых равна доле здоровых среди всех). Известно, что есть богатый горожанин и есть здоровый горожанин. Обязательно ли найдётся богатый здоровый горожанин?

Задача 18*. Два лекарства A и B испытывали на мужчинах и женщинах. Каждый человек принимал только одно лекарство. Общий процент людей, почувствовавших улучшение, больше среди принимавших A. Процент мужчин, почувствовавших улучшение, больше среди мужчин, принимавших B. Процент женщин, почувствовавших улучшение, больше среди женщин, принимавших B. **а)** Возможно ли это? **б)** Какое лекарство нужно посоветовать принять пациенту, если его пол неизвестен?

1	2	3	4 а	4 б	4 в	4 г	5 а	5 б	6	7	8 а	8 б	8 в	9	10	11	12	13	14	15	16 а	16 б	17	18 а	18 б