

**Определение 1.** Начав с символа 0, будем заменять символы по правилу  $0 \rightarrow 01, 1 \rightarrow 10$ . Получим последовательность слов:  $w_0 = 0, w_1 = 01, w_2 = 0110, w_3 = 01101001, w_4 = 0110100110010110, \dots$ . Из задачи 1 следует, что можно построить бесконечное слово  $w$ , первые  $2^n$  символов которого при каждом  $n$  совпадают с  $w_n$ ; оно называется *словом Туэ*.

**Задача 1.** По данному слову  $w_n$  из задачи 1 построим слово  $w'_n$ , заменив все 0 на 1 и все 1 на 0. Докажите, что при всех  $n$  выполнено  $w_{n+1} = w_n w'_n$ .

**Задача 2.** Для каждого целого  $n \geq 0$  определим  $p_n$  так:  $p_n = 0$ , если в двоичной записи числа  $n$  чётное число единиц, и  $p_n = 1$ , если нечётное. Докажите, что  $w = p_0 p_1 p_2 p_3 \dots$ .

**Определение 2.** Слово называется *бесквадратным*, если оно не содержит подслов вида  $xx$ , и называется *бескубным* — если не содержит подслов вида  $xxx$  (где  $x$  — непустое слово).

Слово называется *сильно бескубным*, если в нём нет подслов вида  $xx\alpha$ , где  $x$  — непустое слово,  $\alpha$  — первая буква  $x$ . Иными словами, слово сильно бескубное, если в нём нет подслов вида  $\alpha y \alpha y \alpha$ , где  $\alpha$  — буква,  $y$  — слово (возможно, пустое).

**Задача 3.** Докажите, что слово сильно бескубно тогда и только тогда, когда в нём нет подслов вида  $\beta z z$ , где  $\beta$  — последняя буква слова  $z$ .

**Определение 3.** Слово называется *словом без перекрытий*, если в нём нет «перекрывающихся» вхождений никакого слова, то есть нет подслова вида  $xu = zx$ , где слово  $u$  короче слова  $x$ .

**Задача 4.** Слово свободно от перекрытий тогда и только тогда, когда оно сильно бескубно.

**Задача 5.** (*Теорема Туэ*) Бесконечное слово Туэ (из определения 1) сильно бескубно.

**Задача 6.** Докажите, что слово Туэ неперiodично.

**Задача 7.** Решите задачу 15д\* листка 27, используя слово Туэ.

**Определение 4.** Определим новый алфавит из четырёх символов  $[00], [01], [10], [11]$ . Для любого слова  $u = c_0 c_1 c_2 \dots$  из алфавита 0,1 определим слово  $v = d_0 d_1 d_2 \dots$  по правилу  $d_i = [c_i c_{i+1}]$ .

**Задача 8.** Слово  $u$  сильно бескубно тогда и только тогда, когда слово  $v$  бесквадратно.

**Задача 9.** Пусть  $v$  построено по слову Туэ  $w$  из определения 1. Докажите, что тогда символу  $[00]$  всегда предшествует  $[10]$ , а за  $[00]$  всегда идёт  $[01]$ ; символу  $[11]$  всегда предшествует  $[01]$ , а за  $[11]$  всегда идёт  $[10]$ . Докажите, что если заменить всюду в слове  $v$  символы  $[00]$  и  $[11]$  на 1, символ  $[01]$  на 2 и символ  $[10]$  на 3, получим бесквадратное слово.

1	2	3	4	5	6	7	8	9