Определение 1. Говорят, что задана *последовательность* чисел x_1; x_2; x_3; ..., если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число x_n. Другими словами, *последовательность*— это произвольная числовая функция, определённая на множестве натуральных чисел. Обозначение: (x_n).

Задача 1. Есть ли последовательность, содержащая все **а)** рациональные; **б)*** действительные числа?

Определение 2. Последовательность (x_n) называется *ограниченной сверху,* если найдётся такое число C, что при всех натуральных n будет выполнено неравенство $x_n < C$.

Задача 2✐. **а)** Дайте определение последовательности, ограниченной снизу.
б) Докажите, что (x_n) *ограничена* (т. е. ограничена и сверху и снизу) тогда и только тогда, когда найдётся такое число $C > 0$, что при всех натуральных n будет выполнено неравенство $|x_n| < C$.

Задача 3. Найдите ограниченную последовательность, у которой
а) есть и наибольший, и наименьший члены; **б)** есть наибольший, но нет наименьшего;
в) есть наименьший, но нет наибольшего; **г)** нет ни наименьшего, ни наибольшего.

Задача 4. Найти наибольший член последовательности: **а)** $\frac{n^2}{2^n}$; **б)** $\frac{n}{100+n^2}$; **в)** $\frac{1000^n}{n!}$; **г)** $-n^2+5n-1$.

Задача 5✐. Перепишите, не используя отрицания: «(x_n) не является ограниченной».

Задача 6. Ограничена ли последовательность $(1+x)^n$, где $x > 0$?

Задача 7✐. При каких q последовательность $x_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ ограничена?

Определение 3. Сумма последовательностей (x_n) и (y_n) — последовательность (z_n), где $z_n = x_n + y_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Аналогично определяют разность, произведение, отношение двух последовательностей.

Задача 8✐. Верно ли, что **а)** сумма; **б)** разность; **в)** произведение; **г)** отношение ограниченных последовательностей — тоже обязательно ограниченная последовательность?

Задача 9. Любая ли последовательность есть отношение двух ограниченных последовательностей?

Определение 4. Интервал $(a;b)$ называется *ловушкой* для последовательности (x_n), если $x_n \in (a;b)$ при $n \gg 0$. Интервал $(a;b)$ называется *кормушкой* для (x_n), если $x_n \in (a;b)$ для бесконечного количества номеров n. Определение кормушки и ловушки можно распространить и на отрезки, и на лучи (сделайте это!).

Задача 10. **а)** Докажите, что всякая ловушка для (x_n) будет и кормушкой для (x_n).
б) Приведите пример (x_n) и кормушки для неё, которая не является ловушкой для (x_n).

Задача 11. Пусть даны три отрезка, $U:\ [-0,5;0,5]$, $V:[-1;1]$, $W:[-2;2]$ и три последовательности

$$\alpha:\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ldots;\frac{1}{n};\ldots,\quad \beta:\ 1;\ 2;\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{4}{3};\ldots;\frac{1}{n};\ \frac{n+1}{n};\ldots,\quad \gamma:\ 1;\ \frac{1}{2};\ 3;\ \frac{1}{4};\ 5;\ \frac{1}{6};\ldots;2n-1;\ \frac{1}{2n};\ldots.$$

Какие отрезки для каких последовательностей будут кормушками, какие для каких — ловушками?

Задача 12✐. **а)** Докажите, что любые две ловушки для данной последовательности пересекаются
б) Верно ли, что если два интервала — ловушки для (x_n), то и их пересечение — ловушка для (x_n)?

Задача 13*. Найдётся ли последовательность, для которой любой интервал будет кормушкой?

Задача 14✐. Докажите, что у ограниченной последовательности есть кормушки сколь угодно малой длины.

Задача 15. Докажите, что последовательность не является ограниченной тогда и только тогда, когда
а) никакой интервал не будет для неё ловушкой; **б)** можно выбрать хотя бы одно из двух направлений, что любой луч этого направления будет для неё кормушкой.

Задача 16. Докажите, что для последовательности (x_n) из положительных чисел любой луч положительного направления будет ловушкой если и только если никакой интервал не будет для (x_n) кормушкой.

Определение 5. Последовательность *фундаментальная*, если для неё есть сколь угодно короткие ловушки.

Задача 17. Верно ли, что **а)** фундаментальная последовательность ограничена; **б)** любая кормушка фундаментальной последовательности будет для неё и ловушкой; **в)*** ограниченная последовательность фундаментальна тогда и только тогда, когда любые две её кормушки, являющиеся отрезками, пересекаются.

Задача 18. **а)** Может ли быть фундаментальной сумма двух нефундаментальных последовательностей?
б) А произведение? **в)** А сумма фундаментальной и нефундаментальной последовательностей?

Задача 19. Верно ли, что фундаментальны **а)** сумма двух фундаментальных; **б)** произведение фундаментальной и ограниченной; **в)** произведение двух фундаментальных последовательностей.

1 а	1 б	2 а	2 б	3 а	3 б	3 в	3 г	4 а	4 б	4 в	4 г	5	6	7	8 а	8 б	8 в	8 г	9	10 а	10 б	11	12 а	12 б	13	14	15 а	15 б	16	17 а	17 б	17 в	18 а	18 б	18 в	19 а	19 б	19 в