

**Задача 2.** а) Докажите, что  $a + \frac{1}{a} \geq 2$  при  $a > 0$ . б) Каково наименьшее значение  $a + \frac{9}{a}$  при  $a > 0$ ?

**Задача 4.** Докажите, что  $x^{n_1} - x^{n_2} + x^{n_3} - \dots + x^{n_{2k+1}} \geq 0$  при  $x > 0$  и натуральных  $n_1 > n_2 > \dots > n_{2k+1}$ .

**Задача 6.** Найдите первые а) 9; б) 10; в)\* 18 знаков после запятой у числа  $\sqrt{0,999\,999\,999}$ .

**б)** (*Гармонический ряд*) Для любого ли числа  $C$  найдется такое  $n \in \mathbb{N}$ , что будет верно неравенство  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \geq C$ ? **в)** Тот же вопрос для неравенства  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \geq C$  (оно у нас было :)).

\*\*\*

**Задача 10** . Докажите, что при всех натуральных  $n$  и при всех неотрицательных  $x$  выполнены неравенства **а)** (неравенство Бернулли)  $(1+x)^n \geq 1+nx$ ; **б)**  $(1+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$ .

**Задача 12.** Докажите, что а)  $2^n > n$ ; б)  $2^n > \frac{n(n-1)}{2}$ ; в) если  $n > 2000$ , то  $2^n \geq 1000n$ .

г) Дан многочлен  $P(x) = p_k x^k + p_{k-1} x^{k-1} + \dots + p_1 x + p_0$ , где  $p_k > 0$ . Докажите, что  $P(x) > 0$  при  $x \gg 0$ .

$$\underbrace{2^r \cdot 2^k \cdot \dots \cdot 2^k}_{100 \text{ штук}} \geq \underbrace{(100k + r) \cdot \dots \cdot (100k + r)}_{100 \text{ штук}}.$$

\*\*\*

**Задача 19.** Докажите, что  $2^n > n^{50}$  при  $n \gg 0$ , с помощью задачи 17.

[illegible]