Листок №26

Равномощность. Счётные множества

07.11 – 17.11/2018
27/22/17 з. на 5/4/3

Определение 1. Говорят, что между множествами A и B задано *взаимно однозначное соответствие,* если каждому элементу множества A поставлен в соответствие какой-то определенный элемент множества B, причём каждый элемент множества B поставлен в соответствие ровно одному элементу множества A. Говорят, что множества A и B *равномощны (имеют одинаковые мощности),* если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Обозначение: $|A| = |B|$.

Задача 1. Докажите следующие утверждения:
а) $|A| = |A|$; **б)** если $|A| = |B|$, то $|B| = |A|$; **в)** если $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, то $|A| = |C|$.

Задача 2. Сколько есть взаимно однозначных соответствий между двумя конечными множествами с одинаковым числом элементов?

Задача 3. Даны четыре множества: $\mathbb{N}$; множество чётных натуральных чисел; $\mathbb{Z}$; множество натуральных чисел, кроме числа 3. Докажите, что эти множества равномощны между собой.

Задача 4. Докажите, что равномощны следующие множества точек:
а) любые два отрезка различной длины; **б)** любые два интервала различной длины.
(*Указание:* нарисуйте геометрическую картинку, устанавливающую соответствие.)

Определение 2. Множество называется *счётным,* если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$.
Говорят, что множество X *не более чем счётно,* если X конечно (например, пусто) или счётно.

Задача 5✎. Любое ли счётное множество можно разбить на 3 непересекающихся счётных множества?

Задача 6. Ровно за минуту до Нового года Дед Мороз кладёт Васе под ёлку одну за другой 10 конфет, за полминуты до Нового года кладёт ещё 10 конфет (тоже по очереди), за четверть минуты — так же кладёт ещё 10, и так далее до бесконечности. Баба Яга за полминуты до Нового Года съедает конфету, которую Дед Мороз положил первой, за четверть минуты до Нового года съедает конфету, которую Дед Мороз положил второй, и т.д. Сколько конфет будет под ёлкой в Новый год?

Задача 7°. В ящике A счётное число орехов, ящики B и C пусты. Берут 10 орехов из ящика A и перекладывают их в ящик B, после чего берут один орех из ящика B и перекладывают его в ящик C. Сколько орехов может оказаться в каждом из ящиков после бесконечного числа таких действий?

Задача 8✎. Докажите, что **а)** подмножество счётного множества не более чем счётно;
б) если множества A и B счётны, то $A \cup B$ тоже счётно; **в)** объединение конечного (не пустого) множества счётных множеств счётно. **г)** объединение счётного множества счётных множеств счётно.
д) Верно ли, что счётное объединение конечных множеств всегда счётно?

Задача 9✎. Докажите, что счётно **а)** множество точек плоскости, координаты которых — целые числа; **б)** множество $\mathbb{Q}$; **в)** множество пар $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$, где A и B счётны.

Задача 10*. Найдите алгебраическое выражение от двух переменных x и y, задающее взаимно однозначное соответствие между множеством точек плоскости с натуральными координатами и $\mathbb{N}$.

Задача 11. Докажите, что счётно **а)** множество конечных последовательностей из 0 и 1;
б) множество предложений русского языка; **в)** множество конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$.

Задача 12. Счётно ли **а)** множество точек плоскости, обе координаты которых рациональны;
б) множество всех треугольников на плоскости, координаты вершин которых рациональны;
в) множество всех многоугольников на плоскости, координаты вершин которых рациональны?

Задача 13. Счётно ли любое бесконечное множество непересекающихся
а) интервалов длины более 1 на прямой; **б)** интервалов на прямой; **в)** кругов на плоскости;
г) восьмёрок на плоскости (восьмёрка — это любые две касающиеся внешним образом окружности);
д)* букв «Т» (любых размеров) на плоскости?

Задача 14. Счётно ли множество корней квадратных уравнений с рациональными коэффициентами?

Задача 15*. Может ли множество быть равномощно множеству всех своих подмножеств?

1 а	1 б	1 в	2	3	4 а	4 б	5	6	7	8 а	8 б	8 в	8 г	8 д	9 а	9 б	9 в	10	11 а	11 б	11 в	12 а	12 б	12 в	13 а	13 б	13 в	13 г	13 д	14	15