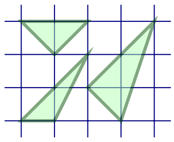
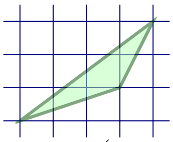
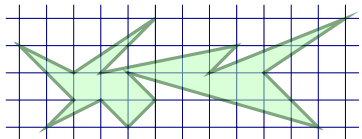
Листок №8д

Геометрия на клетчатой бумаге

13.10 – 22.10/2018
30/25/20 з. на 5/4/3

Как связаны площадь многоугольника, лежащего на клетчатой бумаге (сетке) со стороной клетки 1, и число накрытых им узлов сетки? Мы ответим на этот вопрос для многоугольников с вершинами в узлах сетки.

Задача 1. Найдите площади многоугольников, приведенных на рисунках справа:

а)  **б)**  **в)** 

Задача 2. Найдите формулу, выражающую площадь через i (число узлов внутри) и b (число узлов на границе)
а) для прямоугольника со сторонами, лежащими на линиях сетки;
б) для прямоугольного треугольника с вершинами в узлах и катетами, лежащими на линиях сетки.

Задача 3. **а)** Проверьте, верна ли полученная вами в задаче 2 формула для примеров из задачи 1?
б) Два многоугольника (с вершинами в узлах) граничат по ломаной и составляют вместе новый многоугольник. Пусть Ваша формула верна для двух из этих многоугольников. Верна ли она для третьего?

Задача 4. Придумайте формулу, выражающую площадь через число узлов внутри и на границе для любого
а) треугольника с вершинами в узлах сетки; **б)** четырехугольника с вершинами в узлах сетки.

Задача 5*. Докажите, что во всяком n–угольнике ($n > 3$) найдётся диагональ, принадлежащая ему целиком. (*Замечание:* результатом этой задачи можно пользоваться далее без доказательства.)

Задача 6. Докажите, что всякий многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники так, чтобы диагонали целиком принадлежали многоугольнику и не пересекались внутри многоугольника.

Задача 7. (*Формула Пика*) Обобщите формулу из задачи 4 на любой многоугольник с вершинами в узлах сетки.

***

Задача 8. Король обошел шахматную доску, побывав на каждом поле по разу, и последним ходом вернулся на исходное поле. Ломаная, соединяющая последовательно центры полей в пути короля, не имеет самопересечений.
а) Какую площадь может ограничивать эта ломаная? **б)*** Какую наибольшую длину она может иметь?

Задача 9. Докажите, что у многоугольника с вершинами в узлах сетки площадь — целое или полуцелое число, а квадраты длин сторон — целые числа.

Задача 10. Найдётся ли правильный **а)** треугольник; **б)** шестиугольник с вершинами в узлах сетки?

Задача 11. Дан правильный n–угольник M с вершинами в узлах сетки. Докажите, что существует правильный n–угольник с вершинами и центром в узлах сетки (используйте M для его построения).

Задача 12*. Для каких n существует правильный n-угольник с вершинами в узлах сетки?

Задача 13*. На плоскости провели много параллельных прямых на равном расстоянии друг от друга («тетрадь в линейку»). Для каких n можно нарисовать правильный n-угольник с вершинами на этих прямых?

Определение 1. Назовём треугольник (или параллелограмм) с вершинами в узлах сетки *простым,* если внутри него и на его сторонах нет других узлов сетки кроме его вершин.

Задача 14. **а)** Какова площадь простого треугольника? **б)** Может ли он иметь сколь угодно большой периметр? **в)** Какие простые треугольники прямоугольные? **г)*** У любого ли простого треугольника есть неострый угол?

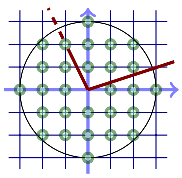
Задача 15*. В трёх вершинах клетки сидит по кузнечику. Они начинают играть в чехарду: каждый может прыгнуть через одного из двух других, после чего оказывается в симметричной относительно него точке.
а) Докажите, что кузнечики всегда будут находиться в вершинах простого треугольника.
б) Может ли один из кузнечиков после нескольких прыжков попасть в четвертую вершину исходной клетки?
в) Из каких простых треугольников можно прыжком получить треугольник с меньшей наибольшей стороной?
г) В вершинах каких простых треугольников могут после нескольких прыжков оказаться наши кузнечики?

Задача 16. Докажите, что параллелограмм $ABCD$ с вершинами в узлах сетки является простым тогда и только тогда, когда все параллелограммы, полученные из $ABCD$ параллельными переносами, сдвигающими узел A в разные узлы сетки, покрывают плоскость и не накладываются друг на друга.

Задача 17*. **а)** На плоскости дана клякса площади больше 1. Докажите, что у каких-то двух её точек разности соответствующих координат целые. **б)** (*Теорема Минковского*) На плоскости дана центрально-симметричная (относительно узла) выпуклая фигура площади больше 4. Докажите, что она содержит больше одного узла.

Задача 18*. Каждый узел, кроме узла O, клетчатой бумаги со стороной клетки 1 см накрыли кругом с центром в этом узле и радиусом 0,000001 см. Можно ли из узла O выпустить луч, не пересекающий ни одного круга?

Задача 19*. В парке, имеющем форму круга радиуса s м (s — целое число), деревья посажены во всех вершинах квадратной сетки со стороной квадратов 1 м, кроме центра (пример для $s = 3$ см. на рисунке). Докажите, что вид из центра **а)** полностью заслонён, если радиусы всех деревьев больше $\frac{1}{s}$ м; **б)** заслонён не полностью, если радиусы всех деревьев меньше $\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ м.



1	1 а	1 б	1 в	2 а	2 б	3 а	3 б	4 а	4 б	5	6	7	8 а	8 б	9	10 а	10 б	11	12	13	14 а	14 б	14 в	14 г	15 а	15 б	15 в	15 г	16	17 а	17 б	18	19 а	19 б