Листок №18 — **Прогрессии** — 21.04 – 12.05/2018, 34/28/22 з. на 5/4/3

Определение 1. *Арифметическая прогрессия* — это (конечная или бесконечная) последовательность чисел $\ldots, a_1, a_2, a_3, \ldots$, в которой разность $d = a_k - a_{k-1}$ между соседними членами a_k и a_{k-1} одинакова для всех k; она называется *разностью* или *приращением* прогрессии.

Задача 1. **а)** Выразите n-й член арифметической прогрессии через первый член и разность.
б) Найдите 50-е натуральное число среди чисел, больших 90 и имеющих остаток 3 при делении на 4.

Задача 2. **а)** Каждый член последовательности (кроме крайних, если они есть) равен среднему арифметическому двух соседних членов. Верно ли, что это арифметическая прогрессия? **б)** Верно ли обратное?

Задача 3. В некоторой арифметической прогрессии сумма первых n членов равна сумме первых m членов (где $m < n$). Докажите, что сумма первых $n + m$ членов этой прогрессии равна нулю.

Задача 4. Выразите сумму всех членов конечной арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n$ через
а) два крайних члена и число слагаемых; **б)** начальный член, число слагаемых и приращение.

Задача 5. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, оканчивающихся на 7.

Задача 6. По строкам и столбцам прямоугольной таблицы $m \times n$ стоят арифметические прогрессии. Найдите сумму всех чисел в таблице, если сумма четырёх угловых чисел равна S.

Задача 7. Найдите арифметическую прогрессию, у которой при каждом натуральном n сумма первых n членов равна **а)** $3n$; **б)** n^2; **в)** $n^2 + n$; **г)** $2n^2 - 3n$.

Задача 8. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Докажите, что арифметическая прогрессия, сумма первых n членов которой равна $f(n)$ при всех натуральных n , **а)** существует при $c = 0$; **б)** не существует при $c \neq 0$.

Задача 9. Фабрика выпускает наборы из $n > 2$ белых слоников различной величины и массы, стоящих по росту. По стандарту, разность масс соседних слоников должна быть одной и той же. При каких n контролер гарантированно сможет это проверить с помощью чашечных весов без гирь?

Задача 10. Можно ли натуральный ряд покрыть k арифметическими прогрессиями с различными целыми разностями, не равными 1, если **а)** $k = 2$; **б)** $k = 3$; **в)*** $k = 4$; **г)*** $k = 5$?

***

Определение 2. *Геометрическая прогрессия* — это (конечная или бесконечная) последовательность ненулевых чисел $\ldots, a_1, a_2, a_3, \ldots$, в которой отношение $q = a_k/a_{k-1}$ соседних членов одинаково для всех k; оно называется *знаменателем* прогрессии.

Задача 11. Будет ли геометрической прогрессией последовательность, k-й член которой равен
а) $0,\underbrace{0\ldots0}_{k}3$; **б)** $\underbrace{1\ldots1}_{k}$; **в)** 2^{3k+5}; **г)** $g_k \cdot h_k$, где (g_k), (h_k) — геометрические прогрессии?
д) Выразите n-й член геометрической прогрессии через первый член и знаменатель.

Задача 12. **а)** Квадрат каждого члена последовательности (кроме крайних, если они есть) ненулевой и равен произведению двух соседних. Геометрическая ли это прогрессия? **б)** Верно ли обратное?

Задача 13. Некто приезжает в город с новостью и сообщает её двоим. Каждый из вновь узнавших новость через 5 минут сообщает её ещё двоим (которые её не знают) и т. д. (пока все в городе её не узнают). Через сколько времени новость узнает весь город, если в нём 1 000 000 жителей?

Задача 14. Торговец продавал одинаковые орехи. Первый покупатель купил 1 орех, второй — 2, третий — 4, и т. д.: каждый следующий покупал вдвое больше орехов, чем предыдущий. Орехи, купленные последним, весили 50 кг, после чего у торговца остался 1 орех. Сколько орехов (по массе) было у него вначале?

Задача 15. Найдите суммы: **а)** $1 + x + x^2 + \ldots + x^n$; **б)** $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots - \frac{1}{512}$. **в)** Выразите сумму всех членов конечной геометрической прогрессии через начальный член a, число слагаемых n и знаменатель q.

Задача 16. По строкам и столбцам прямоугольной таблицы $m \times n$ стоят геометрические прогрессии. Произведение четырёх угловых чисел равно p. Чему может равняться произведение всех чисел таблицы?

Задача 17*. **а)** Будут ли все целые члены геометрической прогрессии образовывать геометрическую прогрессию? **б)** Можно ли покрыть натуральный ряд конечным числом геометрических прогрессий?

***

Определение 3. *Числа Фибоначчи* – это члены последовательности $f_0, f_1, f_2, \ldots$, в которой $f_0 = f_1 = 1$, а каждый следующий член равен сумме двух предыдущих: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ при всех целых $n \geqslant 2$.

Задача 18. Найдите все **а)** арифметические; **б)** геометрические прогрессии, у которых каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих.

Задача 19. **а)** У двух последовательностей одинаковые первые члены и вторые члены, и каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Докажите, что эти последовательности совпадают.
б) Представьте последовательность Фибоначчи в виде суммы двух геометрических прогрессий, то есть найдите такие прогрессии (g_n) и (h_n), что $f_n = g_n + h_n$ при всех целых $n \geqslant 0$. **в)** Найдите $f_0 + \ldots + f_n$.

1 а	1 б	2 а	2 б	3	4 а	4 б	5	6	7 а	7 б	7 в	7 г	8 а	8 б	9	10 а	10 б	10 в	10 г	11 а	11 б	11 в	11 г	11 д	12 а	12 б	13	14	15 а	15 б	15 в	16	17 а	17 б	18 а	18 б	19 а	19 б	19 в