Итерации

Задача 1. В двух сосудах по 1 л воды. Из 1-го переливают половину воды во 2-й, затем из 2-го переливают треть воды в 1-й, затем из 1-го переливают четверть воды во 2-й и т. д. Сколько воды будет в каждом сосуде после 100 переливаний?

Задача 2. К 50 чёрным бактериям попала белая бактерия. Ежесекундно одна белая бактерия убивает одну чёрную, и все бактерии делятся надвое. Докажите, что все чёрные бактерии будут убиты. Когда?

Задача 3. У числа 3^{1000} нашли сумму цифр, затем нашли сумму цифр получившегося числа, и т. д. Докажите, что эти числа сначала уменьшаются, а потом равны одному и тому же числу (какому?).

Задача 4. N ребят стоят по кругу и считаются так: первый остаётся в круге, следующий (по часовой стрелке) выходит из круга, следующий остаётся, следующий выходит, и т. д., через одного по кругу, пока не останется один человек. На каком месте он стоял сначала, если N равно **а)** 16; **б)** 17; **в)** 1000?

Задача 5. Бесконечную строку нулей и единиц 0110100110010110... составили так. Сначала написали 0. Затем сделали бесконечное число шагов. На каждом шаге к уже написанному куску строки дописывали новый кусок той же длины, получаемый из него заменой всех нулей на единицы, а единиц — на нули. **а)** Какая цифра на 1000-м месте от начала? **б)** Периодична ли эта строка (начиная с какого-то места)?

Задача 6. На бесконечном листе клетчатой бумаги какие-то 100 клеток «заболели». Каждый час одновременно происходят такие изменения: если клетка больна, а две клетки снизу и слева от неё здоровы, она выздоравливает; если клетка здорова, а две клетки снизу и слева от неё больны, она заболевает (остальные клетки не меняются). Докажите, что через некоторое время все клетки будут здоровы.

Задача 7. **а)** На доске написаны натуральные числа x и y. Петя пишет на бумажку одно из них, а на доске уменьшает другое число на 1. С новыми двумя числами на доске он делает ту же операцию, и т.д., пока одно из чисел на доске не станет нулём. Чему в этот момент равна сумма чисел на бумажке? **б)** Та же задача, но Петя повторяет такую операцию: когда на доске a и b, где $a \leqslant b$, он пишет на бумажку a^2 и заменяет числа на доске числами a и $b-a$. **в)** Каков геометрический смысл этих процессов?

Задача 8. Капрал командует шеренге из N солдат: «Нале-ВО!». Часть солдат поворачиваются налево, остальные — направо. Далее каждую секунду каждые два солдата, стоящие лицом друг к другу, поворачиваются друг к другу затылками. Через сколько секунд движение заведомо прекратится?

Задача 9. Аня, Боря и Витя сидят по кругу за столом и едят орехи. Сначала все орехи у Ани. Она делит их поровну между Борей и Витей, а остаток (если он есть) съедает. Затем всё повторяется: каждый следующий (по часовой стрелке) делит свои орехи поровну между соседями, а остаток (если есть) съедает. Орехов больше 3. Докажите, что **а)** хоть один орех съедят; **б)** съедят не все орехи.

Задача 10. По кругу стоят n корзин, в одной лежит яблоко, а остальные — пусты. За ход можно из любой непустой корзины забрать яблоко, а в две соседние с ней корзины добавить по яблоку (запас яблок очень большой). При каких n удастся сделать число яблок в корзинах одинаковым?

Задача 11. Дано несколько белых и чёрных точек, некоторые соединены отрезками. Назовём точку *особой*, если более половины соединённых с ней точек имеют другой цвет. Если есть особые точки, выбирают любую из них и перекрашивают в противоположный цвет. Докажите, что в какой-то момент особых точек не останется.

Задача 12. На некоторых клетках доски 10×10 стоит по фишке. За ход Петя одновременно ставит новые фишки на все пустые клетки, у которых хотя бы две соседние (по стороне) клетки заняты фишками. Он делает ходы, пока добавляются новые фишки. **а)** Приведите пример расстановки фишек, при которой Петя сделает более 40 ходов. **б)** Можно ли так расставить фишки, чтобы Петя сделал более 60 ходов? **в)** А более 64 ходов?

Задача 13. Есть два больших сосуда. В одном — 1 л воды, в другом — 1 л 2%-го раствора соли. Можно переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой (и перемешивать). Удастся ли за несколько таких переливаний получить 1,5%-й раствор в сосуде, где вначале была вода?

1	2	3	4 а	4 б	4 в	5 а	5 б	6	7 а	7 б	7 в	8	9 а	9 б	10	11	12 а	12 б	12 в	13

Задача 14*. На бесконечную белую плоскость посадили ограниченную чёрную кляксу. Каждую секунду все точки меняют свой цвет по такому закону: точка становится чёрной, если больше половины площади круга радиуса 1 с центром в ней — чёрная, иначе становится белой. Может ли клякса жить вечно?

Задача 15*. Гномы некой страны живут в белых и синих домиках. Ежегодно те гномы, у кого больше половины друзей жили последний год в домиках другого цвета, меняют цвет домика (а другие — не меняют). Докажите, что с какого-то момента цвет одних домиков не будет меняться, а других — будет меняться ежегодно.

Задача 16*. За круглым столом сидят 7 гномов. Перед каждым стоит кружка, в некоторые налито молоко. Один из гномов разливает все своё молоко в кружки остальных поровну. Затем его сосед справа делает то же самое, и т. д. Когда последний (седьмой) гном разлил остальным своё молоко, в каждой кружке оказалось исходное количество молока. Всего в кружках 3 литра молока. Сколько молока было в каждой кружке сначала?

Задача 17*. На столе у чиновника Министерства Околичностей лежит n томов Британской энциклопедии, сложенных в несколько стопок. Стопки лежат на столе в один ряд. Каждый день, приходя на работу, чиновник берет по одному тому из каждой стопки, образует из них новую стопку, которую кладет в начало ряда, и записывает в ведомость количество томов в каждой стопке. Например, если в первый день в ведомости записано $(8, 3, 1, 1)$, то на следующий день запись будет $(4, 7, 2)$, потом — $(3, 3, 6, 1)$, $(4, 2, 2, 5)$ и т. д.

а) Пусть $n = 36$. Разложите книги так, чтобы чиновник делал в ведомости одну и ту же запись.

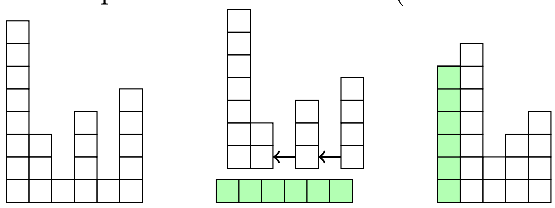
б) Что будет записано в ведомости на 31-й день, если в первый день там записано $(4, 4, 4)$?

в) Докажите, что после какого-то момента записи в ведомости будут циклически повторяться.

г) Что чиновник запишет через месяц, если $n = 6$? (Начальное разбиение на стопки неизвестно.)

Чтобы проследить за путём конкретной книги, будем считать, что чиновник берёт самую нижнюю книгу из первой стопки, на неё кладёт самую нижнюю книгу из второй стопки, и т. д. У каждой книги две координаты: текущий номер её стопки и высота внутри стопки. Это удобно изображать на клетчатой бумаге в первой координатной четверти: книге отвечает закрашенная клетка с теми же координатами.

д) Докажите, что действие чиновника можно описать так: он отрезает нижнюю строчку от закрашенной фигуры, сдвигает то, что осталось, на одну клетку вправо и вниз, а отрезанную строчку поворачивает на 90° (превращая её в первый столбик), см. рис. ниже; затем он, возможно, сдвигает некоторые столбики влево (чтобы не было пустых столбиков).



е) Какой путь проделала книга $(2, 4)$ из пункта б) этой задачи?

ж) Докажите, что при действиях чиновника сумма координат каждой книги либо не изменяется, либо уменьшается.

з) Докажите, что, начиная с какого-то момента, стопки будут располагаться по числу книг в невозрастающем порядке, и каждая книга, начиная с этого момента, будет двигаться по циклу.

и) Докажите, что если n — треугольное число (т. е. $n = 1+2+3+\ldots+k$ для некоторого k), то, начиная с какого-то момента, чиновник ежедневно будет записывать в ведомость одно и то же. Что именно?

к) Пусть n — не треугольное число. Докажите, что период t, с которым после какого-то момента будут повторяться записи в ведомости, удовлетворяет условию $(t-1)t < 2n < t(t+1)$.

14	15	16	17 а	17 б	17 в	17 г	17 д	17 е	17 ж	17 з	17 и	17 к