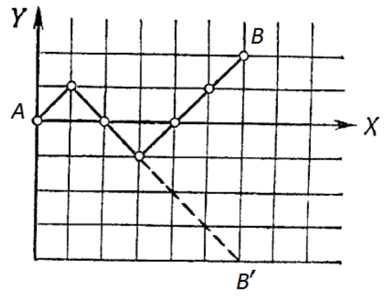
Листок №4д Метод траекторий, числа Каталана и диаграммы Юнга 03.2018

Задача 1. (*Метод траекторий*) Будем рассматривать на клетчатой плоскости пути с началом и концом в узлах клеток, состоящие из диагоналей клеток, где каждая диагональ идёт либо вправо вверх, либо вправо вниз (если двигаться по пути от начала к концу).



а) Сколько существует путей, выходящих из начала координат, в которых m диагоналей идут вправо вверх, а n диагоналей идут вправо вниз?

б) Сколько путей соединяют узел $(0, 0)$ с узлом (x, y) (где $x, y \geqslant 0$)?

в) (*Принцип отражения*) Узлы A и B лежат не ниже оси абсцисс, B лежит правее A. Докажите, что число путей, идущих из A в B, которые касаются прямой $y = -1$ или пересекают её, равно числу всех путей из A в B', где B' — узел, симметричный B относительно прямой $y = -1$.

Задача 2. **а)** У кассы стоят $n+m$ человек; n имеют по купюре 100 р, остальные m — по купюре 50 р. В кассе нет денег, билет стоит 50 р. Сколько есть способов размещения людей в очереди так, чтобы никто не ждал сдачи? **б)** А если сначала в кассе было k купюр по 50 р? **в)** Какой ответ будет в п. а), если надо, чтобы в любой момент времени, кроме, быть может, начального и конечного, в кассе была хоть одна купюра в 50 р?

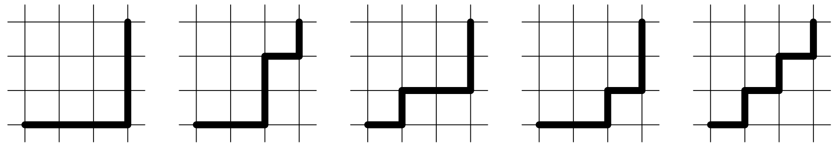
Задача 3. Есть $a+b$ человек разного роста ($a \geqslant b$). Сколькими способами их можно построить в две шеренги (a человек в первой и b во второй), чтобы в каждой шеренге люди стояли по убыванию роста, шеренги стояли друг напротив друга (самый высокий в первой — напротив самого высокого во второй, и т.д., пока вторая шеренга не кончится), и каждый человек во второй шеренге был ниже стоящего напротив в первой?

Задача 4. Игрок с n монетами играет против казино с бесконечным числом монет. За игру он либо проигрывает монету, либо выигрывает с вероятностью $1/2$. Какова вероятность его разорения ровно за m игр?

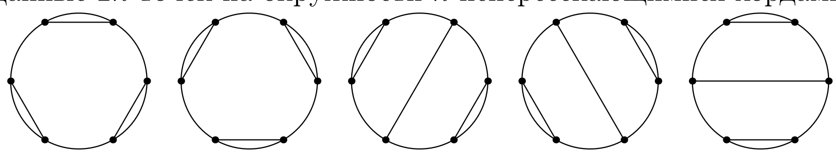
Числа Каталана

Задача 5. Докажите, что следующие величины совпадают с числами Каталана (см. листок 5), и найдите их:

• Число путей из точки $(0, 0)$ в точку (n, n), идущих по линиям клетчатой бумаги вверх и вправо, не поднимаясь выше прямой $y = x$;



• Число способов соединить данные $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами.



• Число способов провести $2n$-звенную ломаную из левого нижнего угла таблички $n \times 2n$ в правый нижний угол. (Ломаная не может выходить за границы таблички, каждое звено ломаной — диагональ клетки, идущая вправо вверх или вправо вниз, если двигаться по ломаной слева направо.)

Задача 6. Найдите явную формулу для последовательности C_n, заданной начальным условием $C_0 = 1$ и рекуррентной формулой $C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \ldots + C_{n-1}C_0$ (при $n \geqslant 1$).

Задача 7. Ленту длиной $n + 1$ см надо разрезать на куски в 1 см. На первом шагу режут в любом месте, на втором — намечают разрез в каждой части, совмещают намеченные места и режут сразу обе части, на третьем режут «одним махом» четыре части и т.д. (получающиеся части в 1 см откладывают). Сколько есть способов так резать ленту? (Два способа разные, если хоть на каком-то шагу результаты разные).

Диаграммы Юнга в задачах

Задача 8. Кассир считает деньги так: сначала считает, сколько всего купюр, потом прибавляет число купюр достоинством больше 1 р, затем — достоинством больше 2 р, и т. д. Почему у него получается верный ответ?

Задача 9. Печенья Алёши лежат в нескольких коробках. Алёша записал, сколько печений в каждой. Серёжа взял по печенью из каждой коробки и положил на 1-й поднос. Затем снова взял по печенью из каждой непустой коробки и положил на 2-й поднос — и т. д., пока все печенья не попали на подносы. Тут Серёжа записал, сколько печений на каждом подносе. Докажите, что Алёша и Серёжа записали поровну различных чисел.

Задача 10. В таблице 10×10 стоят 100 разных чисел. За ход выбирают любой клетчатый прямоугольник и переставляют числа в нём симметрично относительно его центра («повернули прямоугольник на 180°»). Всегда ли за 99 ходов можно добиться, чтобы числа убывали в строках слева направо и в столбцах снизу вверх?

1 а	1 б	1 в	2 а	2 б	2 в	3	4	5	6	7	8	9	10