179 школа, 7Б.
Листок №15

Приложения основной теоремы арифметики

21.02 – 10.03/2018
35/30/25 з. на 5/4/3

Задача 1. **а)** (*Решето Эратосфена*) Выпишем целые числа от 2 до n. Подчеркнём 2 и сотрём числа, кратные 2. Первое неподчёркнутое число подчеркнём и сотрём кратные ему, и т. д., пока каждое число от 2 до n не будет подчёркнуто или стёрто. Докажите, что мы подчеркнём в точности простые числа от 1 до n. **б)** Пусть очередное число, которое мы хотим подчеркнуть, больше $\sqrt{n}$. Докажите, что нестёртые к этому моменту числа от 2 до n простые. **в)** Какие числа, меньшие 100, простые?

Задача 2. Числа a, b, c, n натуральные, $(a, b) = 1$, $ab = c^n$. Найдется ли такое целое x, что $a = x^n$?

Задача 3. Решите в натуральных числах уравнение $x^{42} = y^{55}$.

Задача 4. Найдутся ли такие 10 разных целых чисел, ни одно из которых не квадрат целого числа, со свойством: квадратом целого числа будет произведение **а)** любых двух из них; **б)** любых трёх них?

Задача 5. Найдите каноническое разложение числа **а)** 2018; **б)** 17!; **в)** C_{20}^{10}.

Задача 6. При каких натуральных k число $(k-1)!$ не делится на k?

Задача 7. **а)** (*Теорема Лежандра*) Докажите, что простое число p входит в каноническое разложение числа $n!$ в степени $[n/p] + [n/p^2] + [n/p^3] + \ldots$ (где $[x]$ — это *целая часть* числа x). С какого момента слагаемые в этой сумме станут равными нулю?
б) Сколько у 2000! нулей в конце его десятичной записи? **в)** Может ли $n!$ делиться на 2^n $(n \geqslant 1)$?

Задача 8. Число p простое. Докажите, что C_p^k делится на p, если $0 < k < p$.

Задача 9. (*Малая теорема Ферма*) Пусть p — простое, n — целое. **а)** Докажите индукцией по n, что $n^p - n$ делится на p. **б)** Докажите, что если $(n, p) = 1$, то $n^{p-1} - 1$ делится на p.

Задача 10. Пусть $(a, p) = 1$ и p — простое. **а)** Докажите, что числа a, $2a$, $\ldots$, $(p-1)a$ имеют разные ненулевые остатки от деления на p. **б)** Выведите из пункта а) малую теорему Ферма.

Задача 11. Пусть p простое. **а)** Докажите, что для каждого ненулевого остатка a от деления на p найдётся такой остаток b от деления на p, что $ab \equiv 1 \pmod p$. **б)** Для каких a из предыдущего пункта $b = a$? **в)** (*Критерий Вильсона*) Докажите, что $(p-1)! + 1$ делится на p.

Задача 12*. Может ли быть целым число **а)** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{n}$; **б)** $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \ldots + \dfrac{1}{2n+1}$?

***

Определение 1. *Наименьшим общим кратным* ненулевых целых чисел a и b называется наименьшее натуральное число, которое делится на a и на b. Обозначение: $[a, b]$.

Задача 13. **а)** Как, зная канонические разложения чисел a и b, найти (a, b) и $[a, b]$? **б)** Найдите $[192, 270]$. **в)** Докажите, что $ab = (a, b) \cdot [a, b]$. **г)** Верно ли, что $[a, b]/a$ и $[a, b]/b$ взаимно просты?

Задача 14. Докажите, что любое общее кратное целых чисел a и b делится на $[a, b]$.

Задача 15. Про натуральные числа a и b известно, что $(a, b) = 15$, $[a, b] = 840$. Найдите a и b.

Задача 16. Найдите НОК(1, 2, 3, … , 99)/НОК(2, 4, 6, … , 200).

***

Задача 17. Пусть $p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа n. Обозначим через $\tau(n)$ и $S(n)$ соответственно количество и сумму натуральных делителей числа n.
а) Найдите $\tau(p_1^{\alpha_1})$. **б)** Верно ли, что $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$, если $(a, b) = 1$? **в)** Найдите $\tau(n)$.
г) Найдите $S(p_1^{\alpha_1})$. **д)** Верно ли, что $S(ab) = S(a)S(b)$, если $(a, b) = 1$? **е)** Найдите $S(n)$.

Задача 18. Какие натуральные числа делятся на 30 и имеют ровно 20 натуральных делителей?

Задача 19*. Число n натуральное. Докажите, что количество упорядоченных пар натуральных чисел $(u; v)$, где $[u, v] = n$, равно количеству натуральных делителей у числа n^2.

Задача 20*. Натуральное число называется *совершенным,* если оно равно сумме всех своих натуральных делителей, меньших его самого. Докажите, что чётное число n совершенно тогда и только тогда, когда найдется такое простое p, что $2^p - 1$ также простое, и $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$.

1 а	1 б	1 в	2	3	4 а	4 б	5 а	5 б	5 в	6	7 а	7 б	7 в	8	9 а	9 б	10 а	10 б	11 а	11 б	11 в	12 а	12 б	13 а	13 б	13 в	13 г	14	15	16	17 а	17 б	17 в	17 г	17 д	17 е	18	19	20