Анализ информации

В этом листке есть задачи двух типов: в одних надо просто придумать алгоритм, а в других – ещё и доказать, что нет более быстрого алгоритма. Для примера разберём такую задачу:

Есть 9 монет, одинаковых на вид. Из них одна фальшивая (легче настоящих, которые весят одинаково). За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно гарантированно найти эту монету?

Докажем, что двух взвешиваний хватит. Разделим монеты на три кучки по три монеты. Сравним веса 1-й и 2-й кучек. Если они равны, то фальшивая монета в 3-й кучке, иначе — в более лёгкой. Итак, за одно взвешивание мы нашли кучу из трёх монет, среди которых и фальшивая. Теперь сравниваем на весах две монеты из этой кучи: если весы в равновесии, то фальшивая монета 3-я, а если не в равновесии, то фальшивая та, которая легче.

Докажем, что не удастся гарантированно найти монету за 1 взвешивание. Заметим, что после первого взвешивания все монеты в любом случае разделятся на три группы: в 1-й будут монеты, попавшие на 1-ю чашу весов, во 2-й — монеты, попавшие на 2-ю чашу весов, в 3-й — монеты, которые не взвешивались. Количество монет в группах может быть разным, в какой-то группе может и совсем не быть монет, но главное: в одной из групп будет хотя бы треть общего количества монет (то есть 3 монеты). И фальшивая монета может оказаться как раз в этой группе. Но тогда узнать её уже невозможно: мы истратили взвешивание, и перед нами три монеты (или больше), которые вели себя при этом взвешивании одинаково, они для нас неразличимы.

Другое рассуждение: наклеим на каждую монету жёлтую бумажку, если она была на левой чаше при взвешивании, красную — если на правой, зелёную — если не взвешивалась. Так как бумажек 3 вида, а монет 9, найдутся хотя бы 2 монеты с одинаковыми бумажками, и мы их не различим, а фальшивой может быть одна из них.

Задача 1. Дано 3^n одинаковых с виду монет, одна из них фальшивая (легче настоящих, которые весят одинаково). За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно гарантированно найти фальшивую?

Задача 2. Загадано целое число от 1 до 64. Можно задавать вопросы, на которые дается ответ «да» или «нет». За какое наименьшее число вопросов всегда можно отгадать число, если **а)** каждый следующий вопрос задаётся после того, как получен ответ на предыдущий; **б)** надо заранее сказать все вопросы?

Задача 3. В каждую клетку доски 8×8 записано целое число от 1 до 64 (каждое по разу). За один вопрос, указав любой набор полей, можно узнать числа, стоящие на этих полях (без указания, какую клетку какое число занимает). За какое наименьшее число вопросов всегда можно узнать, какие числа где стоят?

Задача 4. Туристы взяли в поход 80 банок консервов, веса которых известны и различны (есть список). Вскоре надписи на банках стёрлись и только завхоз знает, где что. Он хочет доказать всем, что в какой банке находится, не вскрывая банок и пользуясь только списком и двухчашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов на чашах. Хватит ли ему для этого **а)** четырёх; **б)** трёх взвешиваний?

Задача 5. **а)** В жюри олимпиады 11 человек. Материалы олимпиады хранятся в сейфе. Какое наименьшее число замков должен иметь сейф, чтобы можно было изготовить сколько-то ключей и так их раздать членам жюри, чтобы доступ в сейф был возможен если и только если соберётся не менее 6 членов жюри? **б)** Круглая арена цирка освещается n разными прожекторами. Каждый прожектор освещает некую выпуклую фигуру, причём если выключить любой один прожектор, то арена будет по-прежнему полностью освещена, а если выключить любые два — будет освещена не полностью. При каких n такое возможно?

Задача 6. **а)** Двое показывают карточный фокус. Первый снимает 5 карт из колоды, содержащей 52 карты (заранее перетасованной кем-то из зрителей), смотрит в них и после этого выкладывает их в ряд слева направо, причем одну из карт кладет рубашкой вверх, а остальные — картинкой вверх. Второй участник фокуса отгадывает закрытую карту. Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту. **б)*** Та же задача, но первый выкладывает слева направо четыре карты картинкой вверх, а одну не выкладывает. Второй должен угадать невыложенную карту.

Задача 7. **а)** В тюрьме 100 узников. Надзиратель сказал им: «Я дам вам поговорить друг с другом, а потом рассажу по отдельным камерам, и общаться вы уже не сможете. Иногда я буду одного из вас отводить в комнату, в которой есть лампа (вначале она выключена). Уходя из комнаты, можно оставить лампу как включенной, так и выключенной. Если в какой-то момент кто-то из вас скажет мне, что вы все уже побывали в комнате, и будет прав, я всех выпущу на свободу. А если неправ — скормлю всех крокодилам. И не волнуйтесь, что кого-то забудут, — если будете молчать, то все побываете в комнате, и ни для кого никакое посещение комнаты не станет последним.» Придумайте стратегию, гарантирующую узникам освобождение. **б)** А если неизвестно, была ли лампа в самом начале включена или нет?

Задача 8. Вам и мне надевают на голову шляпу. Каждая шляпа либо чёрная, либо белая. Вы видите мою шляпу, я — вашу, но никто не видит своей шляпы. Каждый из нас (не подглядывая и не подавая друг другу никаких сигналов) должен попытаться угадать цвет своей шляпы. Для этого по команде одновременно каждый называет цвет — «чёрный» или «белый». Если хоть один угадал — мы выиграли. Перед этим нам дали возможность посовещаться. Как действовать, чтобы в любой ситуации выиграть?

Задача 9. **а)** Мудрецам предстоит испытание: им завяжут глаза, наденут каждому чёрный или белый колпак, построят в колонну и развяжут глаза. Затем мудрецы по очереди, начиная с последнего (который видит всех), будут называть цвет своего колпака. Кто ошибётся — тому голову с плеч. Сколько мудрецов гарантированно может спастись? (Каждый видит всех впереди стоящих; у мудрецов до испытания есть время, чтобы договориться.) **б)** А если колпаки могут быть k данных цветов? **в)*** А если колпаки могут быть 100 данных цветов, 100 мудрецов стоят по кругу (видят друг друга) и называют цвета своих колпаков одновременно, и нужно, чтобы цвет своего колпака угадал хотя бы один?

Задача 10. Имеется 1000 бутылок с вином, в одной вино испорчено, и 10 белых мышей. Если мышь выпьет плохого вина, то через минуту станет фиолетовой. Разрешается один раз накапать каждой мыши вина из разных бутылок, дать им выпить одновременно и подождать минуту. Как найти испорченное вино?

Задача 11*. Одиннадцати мудрецам завязывают глаза и надевают каждому колпак одного из 1000 цветов. После этого глаза развязывают, и каждый видит все колпаки, кроме своего. Затем одновременно каждый показывает остальным одну из двух карточек — белую или чёрную. После этого все должны одновременно назвать цвет своих колпаков. Как мудрецам заранее договориться, чтобы это удалось?

Задача 12*. Секретный код к любому из сейфов ФБР — это целое число от 1 до 1700. Два шпиона узнали по одному коду каждый и решили ими обменяться. Согласовав заранее свои действия, они встретились на берегу реки возле кучи из 26 камней. Сначала 1-й шпион кинул в воду один или несколько камней, потом — 2-й, потом — опять 1-й, и т.д. до тех пор, пока камни не кончились. Затем шпионы разошлись. Каким образом могла быть передана информация? (Шпионы не сказали друг другу ни слова.)

Задача 13. В тесте 30 вопросов, на каждый есть 2 варианта ответа (один верный, другой нет). За одну попытку Витя отвечает на все вопросы, после чего ему сообщают, на сколько вопросов он ответил верно. Как Вите гарантированно узнать все верные ответы не позже, чем **а)** после 29-й попытки (и ответить верно на все вопросы при 30-й попытке); **б)*** после 24-й попытки (и ответить верно на все вопросы при 25-й попытке)? (Изначально Витя не знает ни одного ответа, тест всегда один и тот же.)

Задача 14. Ботанический определитель использует 100 признаков. Каждый признак либо есть у растения, либо нет. Определитель считается «хорошим», если любые два растения в нём отличаются более чем по 50 признакам. Может ли хороший определитель описывать более **а)** 50; **б)*** 34 растений.

Задача 15*. Барон Мюнхгаузен убил на охоте 15 уток весом 50, 51, …, 64 кг. Ему известен вес каждой из уток. С помощью чашечных весов барон собирается доказать зрителям, что первая утка весит 50 кг, вторая — 51 кг, третья — 52 кг, и т. д. (вначале зрители не знают про веса уток абсолютно ничего). Какое наименьшее количество гирь потребуется барону, если и гири, и уток можно размещать на обеих чашах весов, а количество взвешиваний не ограничено? (Веса гирь известны как барону, так и зрителям. В наличии неограниченный запас гирь весами 1, 2, …, 1000 кг.)

Задача 16. Фокуснику завязывают глаза, а зритель выкладывает в ряд N одинаковых монет, сам выбирая, какие — орлом вверх, а какие — решкой. Ассистент фокусника просит зрителя написать на листе бумаги любое число от 1 до N и показать всем присутствующим. Увидев число, ассистент указывает зрителю на одну из монет ряда и просит перевернуть её. Затем фокуснику развязывают глаза, он смотрит на ряд монет и безошибочно определяет написанное зрителем число. **а)** Докажите, что если у фокусника с ассистентом есть способ, позволяющий фокуснику гарантированно отгадывать число для $N = a$, то есть способ и для $N = 2a$. **б)*** Найдите все N, для которых у фокусника с ассистентом есть способ.

Задача 17*. Есть n разных ключей от n разных замков (каждый ключ подходит ровно к одной двери). За какое наименьшее число попыток можно гарантированно узнать, какую дверь открывает какой ключ?

1	2 а	2 б	3	4 а	4 б	5 а	5 б	6 а	6 б	7 а	7 б	8	9 а	9 б	9 в	10	11	12	13 а	13 б	14 а	14 б	15	16 а	16 б	17