Целые числа

Определение 1. Пусть n и k — целые числа, $k \neq 0$. Говорят, что n *делится* на k, если найдётся такое целое m, что $n = k \cdot m$. Обозначение: $n \vdots k$. Говорят также, что n *кратно* k или что k *делит* n ($k \mid n$).

Задача 1✎. Верно ли, что **а)** если $n \vdots k$ и $k \vdots n$, то $n = k$; **б)** если $a \mid b$ и $b \mid c$, то $a \mid c$;
в) если $b \vdots a$ и $c \vdots a$, но $d \not\vdots a$, то $b+c \vdots a$, но $b+d \not\vdots a$; **г)** если a и b не делятся на c, то ab не делится на c^2?

Задача 2✎. Пусть m, n — целые, и $5m + 3n \vdots 11$. Докажите, что **а)** $6m + 8n \vdots 11$; **б)** $9m + n \vdots 11$.

Задача 3✎. Докажите, что **а)** $\overline{aaa}$ делится на 37; **б)** $\overline{abc} - \overline{cba}$ делится на 99 (где a, b, c — цифры).

Задача 4. **а)** Докажите, что целое число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры образуют число, кратное 4. **б)** Найдите и докажите признаки делимости на 2, 5, 8, 10.

Задача 5✎. **а)** Из натурального числа $\overline{a_n \dots a_1 a_0}$ вычли сумму его цифр $a_n + \dots + a_1 + a_0$. Докажите, что получилось число, делящееся на 9. **б)** Выведите из пункта а) признаки делимости на 3 и на 9.

Задача 6. Переставив цифры в числе N, получили в 3 раза меньшее число. Докажите, что $N \vdots 27$.

Задача 7. Докажите, что число $11\dots11$, запись которого состоит из 3^n единиц, делится на 3^n.

Задача 8✎. Докажите, что число делится на 11 тогда и только тогда, когда сумма его цифр, стоящих в чётных разрядах, и сумма его цифр, стоящих в нечётных разрядах, отличаются на число, кратное 11.

Задача 9. Может ли $n!$ оканчиваться ровно на 4 нуля? А ровно на 5 нулей?

Задача 10✎. **а)** Целые числа a и b различны. Докажите, что $a^n - b^n \vdots a - b$ при любом натуральном n. Чему равно частное? **б)** Докажите, что $a^n + b^n \vdots a + b$, если $a + b \neq 0$ и натуральное n нечетно.

Задача 11✎. Найдите все целые n, при которых будет целым число **а)** $\frac{4}{n+2}$; **б)** $\frac{n^2+2}{n+2}$.

Задача 12✎. Решите в натуральных числах: **а)** $x^2 - y^2 = 31$; **б)** $x^2 - y^2 = 27$; **в)** $xy - 2x - 3y = 19$.

Определение 2. Натуральное число $p > 1$ называется *простым,* если оно имеет ровно два натуральных делителя: 1 и p, в противном случае оно называется *составным.*

Задача 13°. Докажите, что любое натуральное число, большее 1, либо само простое, либо раскладывается в произведение нескольких простых множителей.

Задача 14✎. **а)** Даны целые числа $a_1, \dots, a_n$, большие 1. Придумайте целое число, большее 1, которое не делится ни на одно из чисел $a_1, \dots, a_n$. **б)** Докажите, что простых чисел бесконечно много.
в) Докажите, что простых чисел вида $3k + 2$ бесконечно много (k — натуральное).

Задача 15. **а)** Могут ли 100 последовательных натуральных чисел все быть составными?
б) Найдутся ли 100 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых?

Задача 16. Докажите, что число $2^n + 3^n$ составное, если n не является степенью двойки.

Целые числа и темы прошлых листков

Задача 17. У каждого целого числа от $n + 1$ до $2n$ включительно (где n — натуральное) возьмем наибольший нечетный делитель и сложим все эти делители. Докажите, что получится n^2.

Задача 18. **а)** Докажите, что числа $\frac{m(m+1)}{2}$ и $\frac{m(m+1)(m+2)}{6}$ целые при любом натуральном m.
б) Докажите, что произведение любых n последовательных целых чисел делится на $n!$.
в) Числа a, b, c, d — натуральные. Обязательно ли число $\frac{(a+b+c+d)!}{a!\ b!\ c!\ d!}$ целое?

Задача 19✎. Сколькими нулями оканчивается число $11^{100} - 1$?

Задача 20. Натуральное число n назовём *хорошим,* если найдётся такая перестановка $x_1, x_2, \dots, x_n$ чисел $1, 2, \dots, n$, что все числа $x_1 + 1, x_2 + 2, \dots, x_n + n$ — степени двойки. Найти все хорошие числа.

Задача 21. У двух натуральных чисел равны суммы делителей и суммы обратных величин к делителям. Докажите, что и сами числа равны.

Задача 22. Даны N различных натуральных чисел. Докажите, что любое натуральное число, делящееся на все эти числа, хотя бы в N раз больше наименьшего из них. (*Подсказка:* решение очень простое.)

1 а	1 б	1 в	1 г	2 а	2 б	3 а	3 б	4 а	4 б	5 а	5 б	6	7	8	9	10 а	10 б	11 а	11 б	12 а	12 б	12 в	13	14 а	14 б	14 в	15 а	15 б	16	17	18 а	18 б	18 в	19	20	21	22