179 школа, 7Б.
Листок №9

Графы

18.11 – 29.11/2017
21/17/13 з. на 5/4/3

Определение 1. *Граф* задан, если задан конечный набор его *вершин,* и для каждой пары разных вершин известно, связаны они *ребром* или нет (если связаны, эти вершины называются *концами* этого ребра). Иногда граф удобно изображать как множество точек (вершин) на плоскости, некоторые пары которых соединены линиями (рёбрами). Бывают графы с *кратными рёбрами* (пару вершин могут соединять несколько рёбер) и *петлями* (вершина может соединяться сама с собой).

Примеры: а) граф знакомств: вершины – школьники, рёбра – знакомства; б) карта: вершины – страны, ребра – пары стран с общим участком границы; в) города и дороги; г) граф короля (коня, ладьи, ферзя...): вершины – клетки, ребра – пары клеток, связанных одним ходом короля (коня, ладьи, ферзя...).

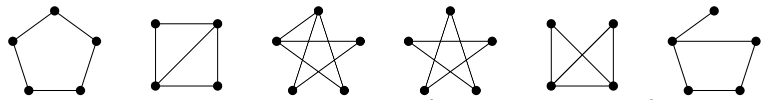
Задача 1. В шахматном турнире участвовали семь школьников. Известно, что Миша сыграл 6 партий, Коля – 5, Илья и Гриша – по три, Андрей и Сева – по две, а Максим – одну. С кем сыграл Илья?

Задача 2. **а)** Идёт Петя, а навстречу ему 5 человек. Докажите, что среди них найдутся либо трое, знакомых с Петей, либо трое, незнакомых с Петей. **б)** Докажите, что среди любых 6 человек найдутся либо 3 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых человека. **в)** А если есть всего 5 человек?

Задача 3. Выпишите в ряд цифры 0, ..., 9 так, чтобы любые две соседние давали число, кратное 7 или 13.

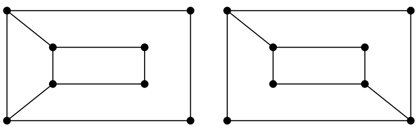
Определение 2. Два графа (без петель и кратных рёбер) называются *изоморфными* («одинаковыми»), если можно занумеровать вершины каждого графа одним и тем же набором различных номеров так, что будет выполнено условие: если две вершины в первом графе соединены ребром, то и во втором графе вершины с этими же номерами соединены ребром, и наоборот.

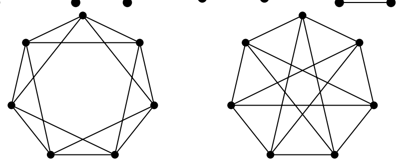
Задача 4. Разбейте графы, изображённые справа, на группы изоморфных.



Задача 5. Нарисуйте все неизоморфные друг другу графы с не более чем четырьмя вершинами.

Задача 6. Изоморфны ли графы:

а) 

б) 

Определение 3. *Полный граф* — граф, в котором каждые две разные вершины соединены одним ребром.

Задача 7. Сколько рёбер в полном графе с n вершинами? (Такой граф обозначается K_n.)

Задача 8. На листе даны **а)** 178; **б)** 179 точек. Играют двое: каждый в свой ход соединяет две точки линией. Нельзя соединять пару точек повторно. Проигрывает тот, после чьего хода из любой точки можно пройти в любую другую по линиям (и проходя их целиком). Кто может обеспечить себе победу?

Определение 4. *Степень* $\deg V$ вершины V — число выходящих из неё рёбер (петли считаем дважды).

Задача 9. Сколько всего рёбер в графе **а)** ладьи; **б)** короля (на доске 8×8).

Задача 10. **а)** Как связаны сумма степеней вершин любого графа и количество его рёбер?
б) Верно ли, что число вершин нечётной степени любого графа чётно?

Задача 11. В классе 27 ребят. **а)** Докажите, что хотя бы двое из них имеют поровну друзей в классе.
б) Ученик Ян заметил: у остальных 26-ти разное число друзей в классе. Сколько из них дружат с Яном?

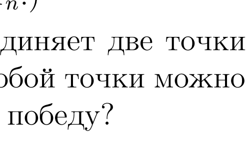
Определение 5. *Путь (длины n)* — это последовательность вершин и соединяющих соседние вершины рёбер: $V_1, e_1, V_2, e_2, \ldots, e_n, V_{n+1}$. Если $V_1 = V_{n+1}$, путь называют *циклическим,* а если и рёбра различны — *циклом.* Путь без повторяющихся рёбер — *цепь,* а без повторяющихся вершин — *простой путь.*

Задача 12. Турист приехал на вокзал и пошёл гулять по улицам. Докажите, что он в любой момент может вернуться на вокзал, проходя лишь те участки улиц, которые он уже прошёл нечётное число раз.

Определение 6. Граф называется *связным,* если каждые две его вершины соединены путём.

Задача 13. В графе n вершин, степень каждой не менее $\frac{n-1}{2}$. Докажите, что он связен.

Задача 14. Кёнигсберг располагался на берегах реки и 2-х островах, соединённых 7-ю мостами (см. рис.). Можно ли было там прогуляться, пройдя каждый мост ровно раз?



Задача 15. (*Эйлеровы графы*) Дан связный граф, степень любой его вершины чётна. Докажите, что **а)** в графе есть простой цикл; **б)** рёбра графа можно разбить на циклы (возможно, с общими вершинами, но без общих рёбер); **в)** условие равносильно тому, что в графе есть цикл, содержащий все рёбра.

1	2 а	2 б	2 в	3	4	5	5 а	5 б	7	8 а	8 б	9 а	9 б	10 а	10 б	11 а	11 б	12	13	14	15 а	15 б	15 в