179 школа, 7Б.
Листок №2д

Отрезки и теорема Хелли

08.11 – 29.11.2017
21/16/11 з. на 5/4/3

Задача 1. Поезд ехал в одном направлении 5,5 ч, и за любой отрезок времени в 1 ч проехал ровно 100 км. Обязательно ли **а)** поезд ехал с постоянной скоростью; **б)** его средняя скорость была 100 км/ч?

Задача 2. Коридор полностью покрыт несколькими прямоугольными дорожками, ширина которых равна ширине коридора. Некоторые дорожки налегают друг на друга. Докажите, что можно убрать несколько дорожек так, чтобы **а)** любой участок пола был покрыт, но не более чем двумя дорожками; **б)** дорожки не налегали друг на друга и покрывали не менее половины коридора.

Задача 3. Биологи 6 часов наблюдали за неравномерно ползущей улиткой так, что она всё это время была под присмотром. Каждый биолог следил за улиткой ровно 1 час без перерывов и зафиксировал, что она проползла за этот час ровно 1 м. Могла ли улитка за время всего эксперимента проползти **а)** 4 м; **б)** 10 м; **в)**✎ меньше 4 м; **г)**✎ больше 10 м.

***

Задача 4✎**.** **а)** Каждый из учеников в течение дня один раз посидел в компьютерном классе. Известно, что там каждый встретился с каждым. Докажите: в некий момент все ученики были в компьютерном классе. **б)** (*Теорема Хелли для прямой*) На прямой дано конечное число отрезков. Известно, что любые два отрезка имеют общую точку. Докажите, что тогда и все отрезки имеют общую точку.

Задача 5. На плоскости даны несколько прямоугольников со сторонами, параллельным осям координат. Любые два из них имеют общую точку. Докажите, что тогда и все они имеют общую точку.

Задача 6. В каждой клетке таблицы 10×10 записано целое число. Соседние по стороне числа отличаются не более чем на 1. Докажите, что среди чисел таблицы найдутся **а)** 6; **б)*** 10 одинаковых.

Задача 7. За день в библиотеке побывало 100 читателей, каждый по разу. Оказалось, что из любых трех по крайней мере двое там встретились. Докажите, что библиотекарь мог сделать важное объявление в такие два момента времени, чтобы в итоге все 100 читателей его услышали.

Задача 8. На прямой дано конечное число отрезков. **а)** Пусть среди любых трёх отрезков какие-то два имеют общую точку. Докажите, что эти отрезки можно разбить не более чем на два подмножества так, что в каждом подмножестве все отрезки имеют общую точку. **б)** Пусть среди любых трёх отрезков какие-то два не имеют общей точки. Докажите, что эти отрезки можно разбить не более чем на два подмножества так, что в каждом подмножестве никакие два отрезка не имеют общей точки.

Задача 9✎**.** Обобщите задачу 8 на случай, когда из любых k отрезков какие-то два **а)** имеют общую точку; **б)** не имеют общей точки. **в)** На прямой даны $mn+1$ отрезков. Докажите, что есть или $m+1$ отрезков, имеющих общую точку, или $n+1$ отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки.

Задача 10✎**.** **а)** На прямой даны $2n+1$ отрезков, каждый пересекает не менее n других. Докажите, что какой-то отрезок пересекает все остальные отрезки.
б) На прямой даны $2n-1$ синих и $2n-1$ красных отрезков. Каждый синий пересекает не менее n красных и наоборот. Докажите, что какой-то синий отрезок пересекает все красные, и наоборот.

Задача 11✎**.** На окружности даны несколько дуг, каждые две имеют общую точку и каждая меньше трети окружности. Докажите, что все дуги имеют общую точку. Верно ли это для дуг большей длины?

Задача 12✎**.** На окружности даны несколько дуг, длина каждой меньше длины полуокружности. Докажите, что если каждые три дуги имеют общую точку, то и все дуги имеют общую точку.

Задача 13✎**.** На окружности даны несколько дуг, каждые две имеют общую точку. Докажите, что есть такие две диаметрально противоположные точки, что каждая дуга содержит одну из этих точек.

***

Определение 1. Множество называется «выпуклым», если оно вместе с любыми двумя своими точками содержит и весь отрезок, соединяющий эти точки.

Задача 14✎**.** (*Теорема Хелли для плоскости*) На плоскости дано конечное число выпуклых множеств, любые три из которых имеют общую точку. Докажите, что тогда и все множества имеют общую точку.

Задача 15✎**.** На плоскости дано конечное множество точек. Любые три из них можно накрыть кругом радиуса 1. Докажите, что и все точки можно накрыть кругом радиуса 1.

Задача 16. Дан выпуклый 7-угольник. Рассмотрим все выпуклые 5-угольники с вершинами в вершинах 7-угольника. Докажите, что эти пятиугольники имеют общую точку.

1 а	1 б	2 а	2 б	3 а	3 б	3 в	3 г	4 а	4 б	5	6 а	6 б	7	8 а	8 б	9 а	9 б	9 в	10 а	10 б	11	12	13	14	15	16