179 школа, 7Б.
Листок №7

Пошаговое конструирование

14.10 – 21.10 /2017
13/10/7 з. на 5/4/3

1. *Многоэтажные здания строят, ставя по очереди следующий этаж на предыдущий. Начав с первого этажа, можно построить 100-этажный небоскрёб. То же с серийными примерами: их получают последовательно, сравнивая с предыдущими и достраивая по мере необходимости.*

Задача 1. Как отметить 100 таких точек, чтобы никакие 3 не лежали на одной прямой?

Задача 2. От прямоугольника с неравными сторонами отрезают квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника; если оставшаяся часть не квадрат, процесс повторяют. Докажите, что можно выбрать такой начальный прямоугольник, для которого ровно на сотом шаге получится квадрат, причем все отрезанные квадраты будут разного размера (оставшаяся часть не в счёт).

Задача 3. В компании из n человек ($n \geqslant 4$) у каждого появилась новость, известная лишь ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2n-4$ разговора все они могут узнать все новости.

2. *Иногда приходится начинать с построения нескольких этажей сразу.*

Задача 4. Найдутся ли 50 различных натуральных чисел, сумма которых кратна каждому из них?

3. *Когда предыдущие примеры серии построены, можно для следующего шага использовать не один, а несколько из них, быть может, даже все. Также серия может распадаться на несколько подсерий. Шаги идут внутри подсерий, часто они однотипны, но начала у серий разные.*

Задача 5. Как построить строку из 100 натуральных чисел, где каждое число при делении на любое из предыдущих даёт в остатке 1?

Задача 6. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое число квадратов, большее 5.

Задача 7. Докажите, что если после очередной реформы в обращение введут монеты в 5 и 26 рублей, то, пользуясь только ими, можно будет уплатить без сдачи любую сумму в целое число рублей, начиная со 100.

Задача 8*. Первоклассник Сёма пока умеет писать только цифры 1 и 7. Докажите, что для любого $n \geqslant 50$ он может написать кратное 7 число с суммой цифр n.

4. *Можно шагать не по всем числам, а только по числам избранного вида.*

Задача 9. Из клетчатого квадрата 64×64 вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трёх клеток. («Уголок» — это квадрат 2×2 без одной клетки.)

Задача 10. На столе стоят 1024 стакана с водой. Разрешается взять один из стаканов и перелить из него часть воды в стакан, где воды меньше так, чтобы воды стало поровну. Укажите, как такими операциями добиться, чтобы во всех стаканах стало поровну воды.

Задача 11. Есть 100 газовых баллонов. Разрешается выбрать от 2 до 5 баллонов и на время соединить их вместе: тогда давление в каждом из них станет равно среднему арифметическому их давлений. Как такими операциями добиться, чтобы во всех баллонах давление стало одинаковым?

5. *Шаги естественно возникают, если в задаче есть какой-то процесс. Если процесса нет, его бывает полезно организовать.*

Задача 12. Плоскость разбита на части несколькими **а)** прямыми; **б)** прямыми и окружностями. Докажите, что эти части можно раскрасить в два цвета так, чтобы части одинакового цвета не имели общего участка границы ненулевой длины.

Задача 13. На клетчатой доске 100×100 стоят несколько **а)** слонов; **б)** ладей. Докажите, что их можно раскрасить в 3 цвета так, чтобы фигуры одинакового цвета друг друга не били.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 а	12 б	13 а	13 б