

Часто в повседневной жизни нам приходится сравнивать количества различных объектов. Во многих случаях нас интересует не сами количества, а ответ на вопрос: каких из них больше? Так, при игре в слова победителем считается тот, кто придумал больше слов. Поэтому при подведении итогов совсем не обязательно считать количество слов каждого, достаточно как-то придумать, как сравнить эти количества. Приведём несколько примеров, как можно проводить такие сравнения без всяких подсчётов и вычислений.

Пример 1. Предположим, что воспитатель детского сада во время утренней прогулки решил выяснить, кого у него в группе больше: мальчиков или девочек. Посчитать их явно довольно сложно, поскольку они всё время двигаются и есть опасность кого-то посчитать два раза, а кого-то пропустить. Наверное одним из самых простых выходов в данной ситуации будет предложить детям построиться парами мальчик-девочка. Если у них это получится, то мальчиков и девочек в группе поровну. Если же какие-то мальчики окажутся без пары, то мальчиков больше. В противном же случае больше девочек.

Пример 2. Петя и Вася решили выяснить, кто из них может сделать больше приседаний. Считать сначала, сколько может присесть первый, а потом второй, им не подходит, поскольку после двух десятков приседаний они боятся сбиться со счёта и ошибиться. Поэтому можно предложить им начать приседать одновременно и делать приседания синхронно (т.е. тоже одновременно). В этом случае тот, кто первый не сможет больше приседать, и будет проигравшим.

Пример 3. Пусть в зале собралось некоторое количество людей, и мы хотим установить, хватит ли на них на всех стульев (или надо принести ещё). То есть нужно сравнить количество людей и количество стульев. Можно конечно попытаться пересчитать и людей, и стулья. Но люди постоянно перемещаются, некоторые стулья мы можем не заметить, да и пересчитывая большое количество стульев легко ошибиться. Вместо этого предложим всем людям сесть на стулья. Если все люди сумели сесть и свободных стульев при этом не осталось, то количество людей равно количеству стульев. Если же, к примеру, окажется, что все стулья заняты, а кто-то всё ещё продолжает стоять, то стульев меньше, чем людей.

Во всех трёх примерах мы делали однотипную операцию, и вот её математическая формулировка:

Определение 1. Говорят, что между двумя множествами установлено *взаимно-однозначное соответствие* (или *биекция*), если любому элементу (объекту) первого множества соответствует единственный элемент (объект) второго множества и наоборот.

В первом примере мы рассматривали множество мальчиков и множество девочек. Строя их парами мальчик-девочка, мы пытались установить взаимно-однозначное соответствие между множеством мальчиков и множеством девочек. Во втором примере первое множество состояло из отдельных приседаний Пети, а второе — из отдельных приседаний Васи. После этого мы пытались сравнить количество отдельных приседаний в первом множестве и во втором, чтоб определить победителя. Для этого мы первому приседанию Пети ставили в соответствие первое приседание Васи, второму приседанию Пети — второе приседание Васи и т.д. Тем самым мы пытались установить биекцию между этими двумя множествами. В третьем примере мы пробовали установить биекцию между множеством людей и множеством стульев. Если бы все стулья оказались заняты людьми, а часть людей ещё продолжала бы стоять, то нам удалось установить взаимно-однозначное соответствие между множеством стульев и частью множества людей. Все сказанное выше позволяет сделать три очевидных утверждения:

Утверждение 1. Если имеются два конечных множества A и B с одинаковым количеством элементов, то между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие, разбив их на пары: первому элементу множества A можно поставить в соответствие первый элемент множества B , второму элементу множества A — второй элемент множества B и т.д.

Утверждение 2. (обратное) Если между двумя конечными множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие, то в них одинаковое количество элементов.

Утверждение 3. Если между конечным множеством A и частью конечного множества B можно установить взаимно-однозначное соответствие, то в множестве B больше элементов, чем в множестве A .

В отличие от реальных людей, которые сами находят себе стулья, в математических задачах объекты не смогут сами разбиться на пары без нашего участия и чёткого описания, какому объекту какой соответствует. Поэтому решение математических задач, в которых устанавливается биекция, должно состоять из трёх этапов. Если эти этапы перевести на язык людей и стульев, то они выглядят следующим образом:

1. Указать, какому человеку на какой стул садиться.
2. Проверить, что разные люди при этом должны будут сесть на разные стулья, т.е. убедиться, что нескольким людям не указано на один и тот же стул.
3. Выяснить, для каждого ли стула есть человек, который должен на него сесть

[illegible]