

**Задача 1.** В коробке 50 конфет трёх видов. Докажите, что конфет какого-то вида не менее 17.

**Задача 2.** Какое наименьшее количество учеников должно быть в школе, чтобы гарантированно можно было найти трёх учеников, отмечающих день рождения в один день?

**Задача 3.** Докажите, что существуют две различные степени семёрки, оканчивающиеся на одну и ту же комбинацию из трёх цифр.

**Задача 4.** В соревнованиях по бегу участвуют 100 спортсменов. Известно, что среди любых 12 из них найдутся двое знакомых между собой. Докажите, что как бы ни раздали спортсменам стартовые номера (не обязательно от 1 до 100), найдутся два знакомых спортсмена, номера которых начинаются с одной и той же цифры.

**Задача 5°.** а) (*Принцип Дирихле*) Докажите, что если в  $n$  клетках сидит не менее  $n + 1$  кроликов, то найдётся клетка, в которой сидит не менее двух кроликов.

б) (*Обобщённый принцип Дирихле*) Докажите, что если в  $n$  клетках сидит не менее  $k$  кроликов, то найдётся клетка, в которой сидит не менее  $k/n$  кроликов. Как следует понимать это утверждение, если  $k$  не делится на  $n$  нацело?

в) Что в предыдущих задачах «клетки», а что — «кролики»?

**Задача 6.** Докажите, что если в  $n$  клетках сидит менее  $\frac{n(n-1)}{2}$  кроликов, то найдутся две клетки, в которых сидит одинаковое количество кроликов (может быть, ни одного)

**Задача 7.** Для награждения по итогам школьного конкурса имеется 70 конфет. При каком наибольшем количестве конкурсантов им можно будет раздать конфеты так, что все они получат разное и не меньшее 3 количество конфет?

**Задача 8.** На заводе 7 цехов, в которых работает 360 человек. Докажите, что в каких-то пяти из этих цехов работает не менее 258 человек.

**Задача 9.** Пять мальчиков собрали 53 гриба, причём известно, что никакие двое не собрали грибов поровну. Докажите, что какие-то трое из них собрали не менее 36 грибов.

**Задача 10.** В коробке 70 карандашей. Докажите, что найдутся либо 9 карандашей одного цвета, либо 9 карандашей разного цвета.

**Задача 11.** В кинотеатре 7 рядов по 10 мест каждый. Группа из 50 детей сходилa на утренний сеанс, а потом на вечерний. Докажите, что найдутся двое детей, которые на утреннем сеансе сидели в одном ряду и на вечернем тоже сидели в одном ряду.

**Задача 12.** Числа от 1 до 9 некоторым образом разбиты на три группы. Докажите, что произведение чисел в одной из групп не меньше 72.

**Задача 13.** Можно ли 100 гирь массами  $1, 2, 3, \dots, 99, 100$  разложить на 10 кучек разной массы так, чтобы выполнялось условие: чем тяжелее кучка, тем меньше в ней гирь?

**Задача 14.** У 10 девочек было по 10 конфет. Каждая девочка подарила несколько конфет другим (конфеты, полученные в подарок, девочки оставляют себе). В результате у всех девочек оказалось разное число конфет. Докажите, что какая-то из девочек подарила конфет не меньше, чем у неё их оказалось в конце.

**Задача 15\*.** На складе имеется несколько ящиков общей массой 10 тонн, причём масса каждого не превосходит тонны. Какое наименьшее количество трёхтонок нужно заказать, чтобы точно суметь вывезти их все за один раз?

1	2	3	4	5 а	5 б	5 в	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

### Примеры задач с решениями

**Пример 2.1.** В классе 30 учеников. Докажите, что найдутся трое учеников, родившихся в одном и том же месяце.

**Решение.** Предположим противное: пусть в каждом месяце родилось меньше трёх учеников, то есть не более двух. Тогда всего учеников не более  $2 \cdot 12 = 24$  человек. Значит, наше предположение неверно, и найдётся месяц, в котором родилось не менее трёх учеников. ■

**Пример 2.2.** Шесть мальчиков съели 13 конфет. Докажите, что найдутся два мальчика, которые съели конфет поровну (возможно, что ни одной).

**Решение.** Предположим, что все мальчики съели разное число конфет. Расположим их по возрастанию числа съеденных конфет. Тогда первый съел не меньше 0 конфет, второй съел больше первого, то есть не меньше 1, и т.д. Значит, всего они съели не меньше  $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$  конфет, что противоречит условию. Значит наше предположение неверно, и найдутся два мальчика, съевшие одинаковое число конфет. ■

**Пример 2.3.** В семи кабинетах стоят 107 парт. Докажите, что можно выбрать из этих кабинетов три, в которых вместе не меньше 47 парт.

**Решение.** Рассмотрим три кабинета, в которых находится больше всего парт. Предположим, что в них вместе не более 46 парт. Тогда в каком-то одном из них не более 15 парт (иначе всего в этих трёх кабинетах было бы не меньше  $16 \cdot 3 = 48$  парт, что противоречит предположению.) Но тогда в оставшихся четырёх кабинетах не более  $15 \cdot 4 = 60$  парт (поскольку выбрали три самых больших кабинета). А всего в семи кабинетах не более  $46 + 60 = 106$  парт, что противоречит условию. Значит предположение неверно, и найдутся три кабинета, в которых вместе не менее 47 парт. ■

**Пример 2.4.** В походе участвовало 18 школьников. Докажите, что среди них либо были пять школьников из одного класса, либо в походе приняли участие школьники не менее чем из пяти классов.

**Решение.** Предположим, что в походе приняли участие школьники не более чем четырёх классов, причем из каждого не более четырёх учащихся. Тогда всего в походе участвовало не более  $4 \cdot 4 = 16$  учащихся, что противоречит условию. Значит предположение неверно, и в походе приняли участие либо школьники не менее чем пяти классов, либо не менее пяти учащихся из одного класса. ■