

Определение 1. Пусть дано конечное вероятностное пространство Ω . *Случайной величиной* называется любая функция $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. *Математическим ожиданием* случайной величины ξ называется число

$$E\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)P(\omega).$$

Задача 1. Чему равно матожидание числа, выпадающего на игральном кубике?

Задача 2. Предположим, случайная величина ξ принимает значения в \mathbb{N} . Покажите, что формулу для её матожидания можно переписать так: $E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P(\xi = i)$ или $E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} P(\xi \geq i)$.

Задача 3. Монетка падает орлом вверх **а)** с вероятностью $1/2$; **б)** с вероятностью $1/3$. Найдите матожидание числа подбрасываний этой монетки до выпадения первого орла.

Задача 4. Школьнику нужно правильно ответить на вопрос с n вариантами ответа. Он ничего не знает и каждый раз даёт случайный ответ. Найдите матожидание числа его попыток до правильного ответа, если **а)** он не запоминает даже, какие ответы он уже давал; **б)** всё-таки запоминает.

Задача 5*. Вдоль дороги стоит n фонарей. Дорожная служба меняет все перегоревшие фонари как только перегорают два фонаря подряд. Каждый фонарь перегорает независимо от других. Найдите матожидание числа фонарей, которые придётся поменять при очередной замене.

Задача 6. (*Линейность матожидания*¹) Пусть случайная величина ξ раскладывается в сумму некоторого числа более простых величин: $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_p$. Докажите что тогда $E\xi = E\xi_1 + E\xi_2 + \dots + E\xi_p$.

Задача 7. 50 мужчин и 50 женщин случайно рассаживаются за круглый стол. Назовем мужчину довольным, если рядом с ним сидит женщина. Для каждого мужчины введем случайную величину равную 1, если он окажется доволен, и 0 иначе. Найдите матожидание **а)** такой случайной величины; **б)** числа довольных мужчин.

Задача 8. Собралось k случайных людей. Найдите матожидание числа пар людей с совпадающими днями рождения (для простоты можно считать, что никто не родился 29 февраля).

Задача 9. Если человек стоит в очереди минуту, будем говорить, что бесцельно затрачена одна человеко-минута. В очереди в банке стоит восемь человек, из них пятеро планируют простые операции, занимающие 1 минуту, а трое планируют операции, занимающие 10 минут. Рассмотрим суммарное количество бесцельно затраченных человеко-минут, найдите его **а)** наименьшее и наибольшее возможные значения; **б)** математическое ожидание, при условии, что порядок людей в очереди случаен.

Задача 10. Каждый из n людей положил в мешок по подарку, затем их перемешали и каждый вытащил подарок для себя. Найдите матожидание числа тех, кому достался подарок, который они сами принесли.

Задача 11. n претендентов на должность в случайном порядке приходят на собеседование. Если в результате собеседования выясняется, что новый претендент лучше того, кто в данный момент занимает должность, первого нанимают, а последнего — увольняют. **а)** С какой вероятностью k -й по силе претендент будет нанят в какой-либо момент. **б)** Найдите матожидание числа увольнений.

Задача 12. Чтобы сгенерировать перестановку чисел от 1 до n , возьмём число 1 и случайно выберем число, в которое оно переходит. Потом случайно выберем число, в которое переходит только что выбранное число и т.д., пока цикл не замкнётся. Будем строить этим методом цикл за циклом, начиная с наименьшего из ещё не выбранных чисел. **а)** Докажите что все перестановки получатся с равной вероятностью. **б)** Чему равна вероятность того, что первый цикл имеет длину m . **в)** Найдите матожидание числа циклов в случайной перестановке. **г)** Найдите матожидание числа пассажиров, сидящих не на своих местах, в задаче **16.16**.

Задача 13*. В каждую жвачку вложен один из n вкладышей (каждый встречается с вероятностью $1/n$). Сколько в среднем надо купить жвачек, чтобы собрать полную коллекцию вкладышей?

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|--------|--------|--------|--------|---|---|--------|--------|---|--------|--------|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----|
| 1 | 2 | 3 а | 3 б | 4 а | 4 б | 5 | 6 | 7 а | 7 б | 8 | 9 а | 9 б | 10 | 11 а | 11 б | 12 а | 12 б | 12 в | 12 г | 13 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

¹Имеется в виду техника подсчета матожиданий, подробно описанная в этой (надеюсь, уже вам известной) книге: «Кормен, Лейзерсон, Ривест, Штайн. Алгоритмы: построение и анализ», глава 5.