Пусть мы проводим серию испытаний или экспериментов, в результате которых могут наблюдаться различные *исходы (элементарные события),* зависящие от случая. Пример — бросание игральной кости, здесь элементарное событие — выпадение одного из чисел $1, 2, \ldots, 6$. Некоторые совокупности элементарных событий называются *событиями.* Пример события — выпадение четного числа очков на игральной кости. Если некоторое событие при многократном повторении испытания происходит примерно с частотой p, говорят, что вероятность данного события равна p.

Если множество возможных исходов конечно, и все исходы равновероятны, то подсчёт вероятности событий сводится к подсчёту числа исходов, содержащихся в событии.

Если же не все исходы равновероятны, то наша интуиция может нас подвести, поэтому требуется некоторая строгость в определениях и утверждениях. Случаи, когда множество исходов бесконечно, требуют особой строгости, так как небольшая неосторожность может вести к парадоксам или противоречиям. Примером этому может служить следующая

Задача 1. Пусть p — вероятность того, что случайно выбранная точка в круге находится на расстоянии, меньшем половины радиуса. Придумайте, как получить $p = 1/2$ и $p = 1/4$.

Определение 1. *Вероятностным пространством* называется тройка $(\Omega, \mathbb{A}, P)$, где

Ω — некоторое множество (*пространство элементарных событий);*

$\mathbb{A}$ — совокупность подмножеств множества Ω, называемых *событиями,* обладающая следующими свойствами:

1. $\varnothing \in \mathbb{A}$, $\Omega \in \mathbb{A}$,
2. если $A \in \mathbb{A}$, то событие $\overline{A}$ *противоположное* событию A (происходящее тогда и только тогда, когда не происходит событие A) лежит в $\mathbb{A}$;
3. если $A, B \in \mathbb{A}$, то *сумма* событий $A \cup B$ (происходящее тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий A, B) лежит в $\mathbb{A}$;
4. если $A, B \in \mathbb{A}$, то *произведение* событий $A \cap B$ (происходящее тогда и только тогда, когда происходит и A, и B) лежит в $\mathbb{A}$;

P — числовая функция $P : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ (называемая *вероятностью,* или *вероятностной мерой),* такая что

1. $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$, $P(A) \geqslant 0$ для любого $A \in \mathbb{A}$;
2. *(аддитивность вероятностной меры)* если $A \cap B = \varnothing$ (т. е. события A и B *несовместны),* то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

Задача 2.** Если множество Ω бесконечно, то требуются дополнительные аксиомы, касающиеся суммы и произведения бесконечного числа событий. Попробуйте их придумать и сформулировать.

Задача 3. **а)** Постройте вероятностное пространство, отвечающее бросанию четырех игральных костей. **б)** Найдите вероятность выпадения при бросании четырёх костей хотя бы одной шестерки.

Задача 4. Пусть $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ — вероятностное пространство. Докажите, что **а)** вероятность любого события не превосходит 1; **б)** если $A, B \in \mathbb{A}$ — события, причём $A \subset B$, то $P(A) \leqslant P(B)$.

Задача 5. Рассмотрим конечное множество Ω из k элементов. Пусть $\mathbb{A}$ — множество 2^{Ω} всех подмножеств Ω. Для каждого $X \in \mathbb{A}$ положим $P(X) = |X|/k$. Докажите, что тройка $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ образует вероятностное пространство.

Задача 6. Из множества всех последовательностей длины n, состоящих из цифр 0, 1, 2, случайно выбирается одна. Найдите вероятность того, что в последовательности ровно m_0 нулей, m_1 единиц и m_2 двоек.

Задача 7. Юра выучил 3 билета из 30. На экзамене все билеты лежат на столе, студенты по очереди тянут билеты, вытянутые билеты убирают со стола. Каким выгоднее тянуть билет Юре?

Задача 8. (*Схема Бернулли*) Проводятся n опытов, в каждом опыте может произойти определенное событие («успех») с вероятностью p (или не произойти — «неудача» — с вероятностью $q = 1-p$), после чего подсчитывается количество успехов. Постройте вероятностное пространство, соответствующее этому эксперименту.

Задача 9. **а)** Пусть вероятность попасть под машину при переходе улицы в неположенном месте равна 0,01. Какова вероятность остаться целым, сто раз перейдя улицу в неположенном месте? **б)** Как связана эта вероятность с числом e? Вычислите её поточнее.

Задача 10. (*Геометрическое распределение*) Проводится сколь угодно длинная серия опытов, в каждом из которых может произойти событие («успех») с вероятностью p, или событие «неудача» (с вероятностью $q = 1-p$), до тех пор, пока не произойдёт успех. Подсчитывается количество испытаний до наблюдения первого «успеха». Постройте вероятностное пространство, соответствующее этому эксперименту.

Задача 11. Про некий вид бактерий известно, что каждая бактерия через минуту после своего появления на свет делится с вероятностью p_k на k потомков, где $k = 0, 1, \ldots, 10$. При этом p_0 — это вероятность смерти бактерии через минуту после рождения. Докажите, что вероятность x того, что весь род, начавшийся с данной бактерии, когда-либо целиком вымрет, удовлетворяет уравнению $x = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_{10} x^{10}$.

Задача 12. Каждый из n пассажиров купил по билету на n-местный самолет. Первой зашла сумасшедшая старушка и села на случайное место. Далее, каждый вновь вошедший занимает свое место, если оно свободно; иначе занимает случайное. Какова вероятность того, что последний пассажир займет свое место?

1	2	3 а	3 б	4 а	4 б	5	6	7	8	9 а	9 б	10	11	12

Условная вероятность

Задача 13. Пусть B — событие, обладающее ненулевой вероятностью.
а) Дайте определение условной вероятности $P(A \mid B)$ события A при условии B.
б) Докажите, что тройка $(\Omega, \mathbb{A}, P_B)$, где P_B — условная вероятность, является вероятностным пространством.

Задача 14. Какова вероятность того, что в семье два мальчика, если один из детей — мальчик?

Задача 15. Вероятность попадания в цель при отдельном выстреле равна 0,2. Какова вероятность поразить цель, если в 2% случаев выстрел не происходит из-за осечки?

Определение 2. События A и B называются *независимыми,* если $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. События $A_1, \ldots, A_n$ называются *независимыми в совокупности,* если для любых $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$ выполнено равенство $P(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \cdots \cdot P(A_{i_k})$.

Задача 16. Из колоды в 52 карты выбирается наудачу одна карта. Независимы ли события
а) «выбрать вальта» и «выбрать пику»; **б)** «выбрать вальта» и «не выбрать даму»?

Задача 17. Пусть A и B независимы. **а)** Верно ли, что $P(B \mid A) = P(B)$? **б)** Выразите $P(A \text{ и } B)$ через $P(A)$ и $P(B)$. **в)** Верно ли, что независимы события A и «не B»? **г)** Тот же вопрос про события «не A» и «не B».

Задача 18. Следует ли из попарной независимости нескольких событий их независимость в совокупности?

Задача 19. (*Теорема умножения вероятностей*) Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — события, вероятности которых больше 0. Докажите, что
$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n \mid A_1 \ldots A_{n-1}).$$

Определение 3. События A и B *несовместны,* если они не могут произойти одновременно ($A \cap B = \varnothing$).

Задача 20. (*Формула полной вероятности*) Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — попарно несовместные события («гипотезы»), причем $H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n = \Omega$. Докажите, что для любого события B
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(B \mid H_i).$$

Задача 21. Два охотника одновременно выстрелили одинаковыми пулями в медведя. Медведь был убит одной пулей. Как поделить охотникам шкуру, если вероятность попадания у первого — 0,3, а у второго — 0,6?

Задача 22. Три завода выпускают одинаковые изделия. Первый производит 50% всей продукции, второй — 20%, третий — 30%. Первый завод выпускает 1% брака, второй — 8%, третий — 3%. Выбранное наугад изделие — бракованное. Какова вероятность того, что оно со второго завода?

Задача 23. Пусть при рентгеновском обследовании вероятность обнаружить туберкулез у больного туберкулезом равна 0,9, а вероятность принять здорового человека за больного равна 0,01. Доля больных туберкулезом по отношению ко всему населению равна 0,001. С какой вероятностью человек здоров, если **а)** он был признан больным при обследовании; **б)** он был признан больным при двух независимых обследованиях?

Задача 24. В первой урне 2 белых и 6 чёрных шаров, во второй — 4 белых и 2 чёрных. Из первой урны наудачу переложили 2 шара во вторую, после чего из второй урны наудачу достали один шар.
а) Какова вероятность того, что этот шар белый? **б)** Шар, взятый из второй урны, оказался белым. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую были переложены 2 белых шара?

Задача 25. Из 100 симметричных монет одна фальшивая (с двумя орлами). Выбрали случайно монету, бросили 5 раз: выпали все орлы. С какой вероятностью, если её бросить ещё 10 раз, снова выпадут все орлы?

Геометрические вероятности

При решении требуется построить соответствующее бесконечное вероятностное пространство.

Задача 26. Палку случайно ломают на 3 части. С какой вероятностью из них можно сложить треугольник?

Задача 27. (*Задача Бюффона*) На плоскость, разлинованную параллельными прямыми на расстоянии a друг от друга, случайно брошена игла длиной $l < a$. Найти вероятность пересечения иглы с какой-нибудь прямой.

Задача 28. (*Парадокс Бертрана*) С какой вероятностью случайная хорда некой данной окружности будет больше стороны правильного треугольника, вписанного в эту окружность?

Задача 29. Монету радиусом r и толщиной d бросают на горизонтальную поверхность (соударение неупругое). Какова вероятность того, что монета упадет на ребро?

13 а	13 б	14	15	16 а	16 б	17 а	17 б	17 в	17 г	18	19	20	21	22	23 а	23 б	24 а	24 б	25	26	27	28	29