

**Задача 1.** а) (*Признак сравнения Вейерштрасса*) Пусть  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  — ряды с неотрицательными членами.

Пусть найдётся такой номер  $k$ , что при всех  $n > k$ ,  $n \in \mathbb{N}$  будет выполнено неравенство  $b_n \geq a_n$ . Тогда если  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится, то  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится; если  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится, то  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  расходится.

**б)** (*Признак д'Аламбера*) Пусть члены ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  положительны, и существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ . Если  $q < 1$ , то ряд сходится, а если  $q > 1$ , то ряд расходится. Что можно сказать о сходимости, если  $q = 1$ ?

**в) (Признак Коши)** Пусть члены ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  неотрицательны, и существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ . Если  $q < 1$ , то ряд сходится, а если  $q > 1$ , то ряд расходится. Что можно сказать о сходимости ряда, если  $q = 1$ ?

г) Приведите пример сходящегося ряда с положительными членами, к которому применим признак Коши, но не применим признак д'Аламбера. Бывает ли наоборот?

**Задача 2.** Исследуйте ряды на сходимость:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ; б)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$ ; г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}$ .

**Задача 3.** а) (*Теорема Лейбница*) Пусть  $a_n > 0$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ , и кроме того,  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Тогда знакочередующийся ряд  $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \dots$  сходится.

б) Верно ли утверждение теоремы без условия монотонности  $(a_n)$ ?

## Абсолютно и условно сходящиеся ряды

**Определение 1.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .

**Задача 4.** Докажите, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

**Задача 5.** Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  абсолютно сходится. Тогда абсолютно сходится произвольный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , полученный

из него перестановкой слагаемых, причём  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Определение 2.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется *условно сходящимся*, если он сходится, но ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  расходится.

**Задача 6.** Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится условно.

**а)** Докажите, что ряд, составленный из его положительных (или отрицательных) членов, расходится.

б) (Теорема Римана.) Докажите, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  можно превратить перестановкой слагаемых как в расходящийся ряд, так и в сходящийся с произвольной наперёд заданной суммой.

в) Докажите, что можно так сгруппировать члены ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (не переставляя их), что ряд станет абсолютно сходящимся.

г)\* Пусть  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  — ряд, составленный из комплексных чисел,  $S$  — множество всех перестановок  $\sigma$  натурального ряда, для которых ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$  сходится. Каким может быть множество  $\{\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S\}$ ?

**Задача 7.** Пусть  $s$  — сумма ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ . Найдите суммы

a)  $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$ ; б)  $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$

в) Переставьте члены ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  так, чтобы он стал расходящимся.

**Задача 8.** Существует ли такая последовательность  $(a_n)$ ,  $a_n \neq 0$  при  $n \in \mathbb{N}$ , что ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 a_n}$  сходятся?

Можно ли выбрать такую последовательность из положительных чисел?

**Задача 9\*.** Существует ли такая последовательность  $(a_n)$ , что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$  расходится?

**Задача 10\*.** Пусть функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такова, что для любого сходящегося ряда  $\sum a_n$  ряд  $\sum f(a_n)$  сходится. Докажите, что тогда найдётся такое число  $C \in \mathbb{R}$ , что  $f(x) = Cx$  в некоторой окрестности нуля.

$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{\bar{6}}$	$\frac{1}{B}$	$\frac{1}{r}$	$\frac{2}{a}$	$\frac{2}{\bar{6}}$	$\frac{2}{B}$	$\frac{2}{r}$	$\frac{3}{a}$	$\frac{3}{\bar{6}}$	4	5	$\frac{6}{a}$	$\frac{6}{\bar{6}}$	$\frac{6}{B}$	$\frac{6}{r}$	$\frac{7}{a}$	$\frac{7}{\bar{6}}$	$\frac{7}{B}$	8	9	10